

分类号: O572  
密级: 公开

单位代码: 10422  
学号: 201820247

# 山东大学 博士学位论文

Thesis for Doctor Degree

论文题目: STAR 实验  $\sqrt{s_{NN}}=27$  GeV 金核 + 金核碰撞中净  
(K+ $\Lambda$ ) 多重数分布的高阶累积量的测量

Measurement of Higher-order cumulants of net-(K+ $\Lambda$ ) multiplicity  
distributions in  $\sqrt{s_{NN}} = 27$  GeV Au+Au collisions with STAR

作者姓名 Changfeng Li

学院名称 前沿交叉科学青岛研究院

专业名称 粒子物理与原子核物理

指导老师 徐庆华教授

合作导师 Nihar Sahoo 副教授

2023 年 11 月 29 日



## 原创性声明

本人郑重声明：所提交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的科研成果。对本论文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律責任由本人承担。

论文作者签名：\_\_\_\_\_ 日期：\_\_\_\_\_

## 关于学位论文使用授权的声明

本人完全了解山东大学有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留或向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅；本人授权山东大学可以将本学位论文全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文和汇编本学位论文。

(保密的论文在解密后应遵守此规定)

论文作者签名：\_\_\_\_\_ 导师签名：\_\_\_\_\_ 日期：\_\_\_\_\_



## 摘 要

相对论重离子对撞机 RHIC 束流能量扫描计划的主要目标是探索 QCD 相结构并寻找 QCD 相变临界点在相图中的位置。QCD 相变临界点是一级相变线的终点，其重要的特征是关联长度发散。我们通过感受系数 (Susceptibilities) 的比值对碰撞能量的非单调行为来寻找相变点。这个非单调的行为暗示着随着碰撞能量变化碰撞产生的热密物质穿过临界区域，从而受到临界涨落的影响。感受系数和守恒荷多重数分布的累积量相关。当将感受系数与累积量联系起来时，会出现一个体积项，这使得很难比较不同的碰撞系统和碰撞中心度的感受系数，而且在相对论重离子对撞中，通常很难知道系统的体积，所以用感受系数的比值来消除体积项，在实验上，感受系数的比值就等于守恒荷累积量的比值。

我们需要选择合适的守恒荷，在之前的研究中，净电荷、净重子数和净奇异数这三个守恒荷分别被净电荷、净质子数和净 K 介子数代表。然而，在相对论重离子碰撞中，由于 Lambda 的加入，净 (Lambda+Kaon) 多重数分布的累积量对净奇异数感受系数更加敏感。因此，它可以用来寻找 QCD 相变临界点，还可以研究 QCD 相图的化学冻出参数的味道依赖。本论文首次使用 (Lambda+Kaon) 来代表净奇异数并测量其多重数分布的累积量。

本论文使用 STAR 实验组在 2018 年采集的碰撞能量为  $\sqrt{s_{NN}}=27$  GeV 的金核 + 金核实验数据测量了净 (Lambda+Kaon) 的高阶 (1 至 4 阶) 累积量以及它们的比值。在分析中对于 Lambda 粒子、K 介子和它们的反粒子，我们选取的相空间是横向动量区间为 0.4 到 1.6 GeV/c 且快度区间为  $|y|<0.5$ 。

在计算净 (Lambda+Kaon) 的高阶累积量之前，首先要对数据进行筛选从而挑选出好的对撞事例样本，之后就要对事例中的 K 介子和 Lambda 粒子进行鉴别与重建。鉴别出粒子之后就可以计算净 (Lambda+Kaon) 的累积量，但是由于涉及到探测器的效率问题，也就是从探测器读取到的粒子数并不是每个碰撞事例中实际产生的粒子数，因此需要对探测器效率做一个修正，最近广泛使用的效率修正是 track-by-track 方法，即对每一条径迹的效率单独进行修正，这种方法的好处是由于探测器的效率是中心度、横动量等变量的函数，因此对不同的径迹用与之对应的效率可以更精确地做效率修正。这种思想是如果一个事例实际产生 N 个粒子，那么探测器探测到的粒子数 n 服从二项分布  $B_{p,N}(n)$ ，其中 p 是探测器的效率。利用这个关系发现探测到的粒子数与实际产生的粒子数的阶乘累积量之间的关系为  $\kappa_m(n) = p^m \kappa_m(N)$ ，我们就是利用阶乘累积量之间的关系进行效率修正。

对每个确定的中心度，碰撞参数不是一个确定的值而是一个范围，即每个中心度对应的碰撞参数有一个宽度，这导致即使中心度相同的事例的初始碰撞几何也可能不同，这就是所谓的中心度宽度效应。为了抑制这种划分中心度时人为引入的效应，

我们首先计算单个 RefMult2 的累积量的值, 然后以事例数为权重, 计算在各个中心度区间的累积量的加权平均值, 以获得每个中心度内累积量的值, 这种方法称为中心度宽度修正。之后我们又对统计误差和系统误差做了估计, 估计统计误差时用到了 Bootstrap 方法, 这种方法是从现有的样本中得出关于总体特征的结论。

同时我们还用 UrQMD 模型计算了不同碰撞能量下净 ( $\Lambda + K$ ) 的累积量, UrQMD 模型是一种微观输运模型。在这个时空演化模型中, 包括了强子之间的传播、再散射以及弦激发, 但没有介质修正效应。该模型可以作为重离子碰撞中各种可观测量的基线。

由此我们得到净 ( $K + \Lambda$ ) 的前四阶累积量,  $C_1$  随参与碰撞的粒子数平均值的增加整体上呈线性增加, 且其值为正值, 这表明净  $K$  的产额比净  $\Lambda$  的产额要多, 说明此时奇异介子占支配地位, 这明显与 UrQMD 的结果不相符, 这种差异可能是由于 UrQMD 模型中的高质量共振粒子衰变产额与实验数据不一致引起的, 在 UrQMD 模型事例中包含了高质量共振态的衰变道。

累积量是与系统体积成正比的广延量, 体积效应主导了累积量的值。为了消除体积效应, 我们计算了累积量的比值,  $C_2/C_1$  对碰撞中心度没有特别强的依赖关系, 这是由于累积量的比值不是体积的函数。同时我们也把实验数据与 UrQMD 的计算结果进行了比较, 可以看出  $C_1/C_2$  的实验结果与 UrQMD 的计算结果不能很好地符合。同样,  $C_3/C_2$  和  $C_4/C_2$  的值也显示出对碰撞中心度很弱的依赖关系。

本论文首次用两个粒子的组合代表净守恒荷, 结合已有的 track-by-track 方法进行效率修正, 计算了  $\sqrt{s_{NN}}=27$  GeV 金核 + 金核碰撞中净 ( $\Lambda + K$ ) 数的累积量, 同时也做了中心度宽度修正, 并估算了统计误差和系统误差。还用 UrQMD 模型计算了不同碰撞能量下的累积量作为基线。由此构建了一个完整的分析框架, 利用这个框架可以计算任意多个粒子组合的累积量, 并且可以直接用来分析其它碰撞系统的高阶累积量。用这个方法分析其它粒子组合以及其它碰撞能量的高阶累积量, 对寻找 QCD 相变临界点具有一定的意义。

**关键词:** 累积量; QCD 相变临界点; 净 ( $\Lambda + K$ ) 数;  $\Lambda$  重建

## ABSTRACT

The main goal of the RHIC beam energy scan program is to explore the QCD phase diagram and search for the location of the QCD Critical Point. The QCD critical point is the end point of a first-order phase transition line, and at the critical point the length diverges. We search for the critical point by studying the non-monotonic behavior of the ratio of susceptibilities with respect to collision energy. This non-monotonic behavior suggests that as the collision energy varies, the hot dense matter produced in the collision passes through the critical region and is influenced by critical fluctuations. Susceptibilities are related to the cumulants of the conserved charge multiplicity distribution. When relating the susceptibilities to the cumulants, a volume term appears, making it difficult to compare different collision systems and centralities. Moreover, in relativistic heavy-ion collisions, it is often difficult to determine the system's volume. Therefore, we use the ratio of susceptibilities to eliminate the volume term, which is equal to the ratio of cumulants of conserved charges in experiments.

We need to choose the appropriate conserved charges. In previous studies, the net charge, net baryon and net strangeness are the three conserved charges, and the net charge, net proton number and net kaon number are considered to the proxies respectively. However, in relativistic heavy-ion collisions, the cumulants of net (Lambda+Kaon) multiplicity distribution is more sensitive to the net strangeness susceptibilities due to the presence of Lambda in the calculation. Therefore, it can be used to search for the QCD critical point and study the flavor dependence of the chemical freeze-out parameters in the QCD phase diagram. In this paper, for the first time, using (Lambda+Kaon) to represent net strangeness and measuring the cumulants of its multiplicity distribution.

This paper measures the higher-order cumulants (1 to 4th order) of net (Lambda+Kaon) multiplicity distribution and their ratios with the data  $\sqrt{s_{NN}} = 27$  GeV Au+Au collisions with the STAR experiment taken in the year 2018. The Lambda, Kaon, and their anti-particles are measured with transverse momentum between 0.4 and 1.6 GeV/c, and rapidity  $|y| < 0.5$ .

Before calculating the higher-order cumulants of net (Lambda+Kaon), it is necessary to select a good sample of collision events by applying some analysis condition. Then, the identification of K mesons and reconstruction of Lambda particles in the events are performed. After identifying the particles, one can calculate the cumulants of net (Lambda+Kaon). However, due to the efficiency of the detectors, which refers to the

number of particles detected by the detectors not being equal to the actual number of particles produced in each collision event, a correction for detector efficiency is needed. The widely used method for efficiency correction recently is the track-by-track method, where the efficiency of each track is individually corrected. The advantage of this method is that the efficiency of the detector depends on variables such as centrality and transverse momentum. Therefore, using the corresponding efficiency for each track allows for a more accurate efficiency correction. The idea behind this method is that if an event actually generates  $N$  particles, then the number of particles detected by the detector,  $n$ , follows a Binomial distribution, denoted as  $B_{p,N}(n)$ , where  $p$  is the detector efficiency. It is found that the factorial cumulants between the detected particle number and the generated particle number are related as  $\kappa_m(n) = p^m \kappa_m(N)$ . Thus, we use this relationship to correct for efficiency.

For each specific centrality, the collision parameter is not a fixed value but rather a range. In other words, each centrality corresponds to a width of collision parameters. This means that even events with the same centrality can have different initial collision geometries, referred to as centrality bin width effect. To suppress the artificial effects introduced when dividing the centrality, we first calculate the value of the cumulants for unit bin in the multiplicity distribution that is used for centrality class. Then, using the event number as weights, we calculate the weighted average of the cumulants in each centrality interval to obtain the value of the cumulants within each centrality. This method is called centrality bin width correction. Afterwards, we estimate the statistical and systematical uncertainties. In estimating the statistical uncertainty, we employ the Bootstrap method which derives conclusions about population characteristics from the existing samples.

As a result, we obtain the cumulants up to the fourth order for net (Kaon+Lambda).  $C_1$  increases linearly with increasing average number of participant overall, and its value is positive. This indicates that the yield of net Kaon is higher compared to net Lambda, suggesting the dominance of strange mesons. This is clearly inconsistent with the results from the UrQMD model, and this discrepancy may be caused by the disagreement between the decay yields of high-mass resonance particles in the UrQMD model and experimental data. The decay channels of high-mass resonances are included in the UrQMD model events.

The cumulants are extensive quantities proportional to the system volume, and the volume effect dominates the value of the cumulants. In order to eliminate the volume effect, we calculate the ratio of the cumulants,  $C_2/C_1$ , which have a weak dependence

on the collision centrality. This is because the ratio of the cumulants is not a function of volume. At the same time, we also compared the experimental data with the calculated results from UrQMD and found that the experimental results of  $C_1/C_2$  do not agree well with the calculated results from UrQMD. Similarly, the values of  $C_3/C_2$  and  $C_4/C_2$  also show a weak dependence on the collision centrality.

This paper presents the net conserved charge for the first time using a combination of two particles, and uses the existing track by track method for efficiency correction. The cumulants of the net (Lambda+Kaon) number with the data  $\sqrt{s_{NN}} = 27$  GeV Au+Au collisions with STAR taken in the year 2018 is calculated, and the centrality bin width correction is also performed, and statistical and systematical uncertainties are estimated. The UrQMD model was also used to calculate the cumulants under different collision energies as the baseline. A complete analysis framework has been constructed, which can be used to calculate the cumulants of any combination of multiple particles and can be directly used to analyze the high-order cumulants of other collision systems. Using this method to analyze the high-order cumulants of other particle combinations and other collision energies is of certain significance for finding the critical point of QCD phase transition.

**Key words:** Cumulants; QCD Critical Point; Net-(Lambda+Kaon); Lambda reconstruction



## 目 录

摘 要 . . . . .	i
ABSTRACT . . . . .	iii
插图目录 . . . . .	xi
表格目录 . . . . .	xix
<b>第一章 研究背景 . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1 粒子物理标准模型 . . . . .	3
1.2 量子色动力学 (QCD) 简介 . . . . .	6
1.3 相对论重离子碰撞 . . . . .	8
1.4 寻找 QCD 相图中相变临界点的方法及研究现状 . . . . .	10
1.5 论文的结构安排 . . . . .	17
<b>第二章 实验装置 . . . . .</b>	<b>19</b>
2.1 相对论重离子对撞机 . . . . .	19
2.2 RHIC 上的螺线管径迹探测器——STAR . . . . .	20
2.2.1 时间投影室——TPC . . . . .	22
2.2.2 飞行时间探测器——TOF . . . . .	24
<b>第三章 随机变量分布函数的数值特征 . . . . .</b>	<b>27</b>
3.1 矩和中心矩 . . . . .	27
3.2 矩生成函数 . . . . .	31
3.3 累积量和阶乘累积量 . . . . .	32
3.4 多变量情况下的累积量和阶乘累积量 . . . . .	36
<b>第四章 实验数据分析 . . . . .</b>	<b>47</b>
4.1 事例挑选 . . . . .	47
4.2 K 介子径迹挑选与鉴别 . . . . .	50
4.3 $\Lambda$ 超子的重建 . . . . .	54
4.3.1 $\Lambda$ 超子的重建方法及拓扑筛选条件 . . . . .	56
4.3.2 $\Lambda$ 超子的纯度 . . . . .	60
4.4 对 K 介子和 $\Lambda$ 效率的修正 . . . . .	65
4.4.1 二项式模型 . . . . .	65
4.4.2 单变量情况下的效率修正 . . . . .	67
4.4.3 多变量情况下的效率修正 . . . . .	68

4.4.4	K 介子和 $\Lambda$ 粒子的探测效率 . . . . .	74
4.5	中心度宽度修正 . . . . .	80
4.5.1	相对论重离子碰撞中的中心度 . . . . .	80
4.5.2	自相关效应及其解决方法 . . . . .	80
4.5.3	中心度宽度效应及修正 . . . . .	84
<b>第五章</b>	<b>用 UrQMD 模型计算高阶累积量 . . . . .</b>	<b>87</b>
<b>第六章</b>	<b>净 (<math>K+\Lambda</math>) 高阶累积量测量结果与讨论 . . . . .</b>	<b>93</b>
6.1	误差估计 . . . . .	93
6.1.1	用 Bootstrap 方法估计统计误差 . . . . .	97
6.1.2	系统误差估计 . . . . .	102
6.2	高阶累积量的测量结果与讨论 . . . . .	115
<b>第七章</b>	<b>总结与展望 . . . . .</b>	<b>121</b>
7.1	总结 . . . . .	121
7.2	展望 . . . . .	122
<b>参考文献</b>	<b>. . . . .</b>	<b>123</b>
<b>博士期间发表的论文及其它成果</b>	<b>. . . . .</b>	<b>131</b>
<b>致 谢</b>	<b>. . . . .</b>	<b>133</b>

## Contents

<b>Chinese Abstract</b> . . . . .	i
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	iii
<b>1 Research background</b> . . . . .	1
1.1 Standard model of particle physics . . . . .	3
1.2 Introduction to quantum chromodynamics (QCD) . . . . .	6
1.3 Relativistic heavy ion collisions . . . . .	8
1.4 Methods and research status of finding the critical point of phase transition in the QCD phase diagram . . . . .	10
1.5 Structure and organization of a thesis . . . . .	17
<b>2 Experimental apparatus</b> . . . . .	19
2.1 The relativistic heavy ion collider . . . . .	19
2.2 Solenoidal tracker at RHIC . . . . .	20
2.2.1 The time projection chamber-TPC . . . . .	22
2.2.2 Time of flight-TOF . . . . .	24
<b>3 Numerical characteristics of the probability distribution function of stochastic variables</b> . . . . .	27
3.1 Moments and center moments . . . . .	27
3.2 Moment generating function . . . . .	31
3.3 Cumulants and factorial cumulants . . . . .	32
3.4 Cumulants and factorial cumulants in multivariate case . . . . .	36
<b>4 Experimental data analysis</b> . . . . .	47
4.1 Event quality assurance . . . . .	47
4.2 K mesons track selection and identification . . . . .	50
4.3 $\Lambda$ reconstruction . . . . .	54
4.3.1 $\Lambda$ reconstruction method and topological cut conditions . . . . .	56
4.3.2 The purity of $\Lambda$ . . . . .	60
4.4 Efficiency correction for K meson and $\Lambda$ . . . . .	65
4.4.1 Binomial model . . . . .	65
4.4.2 Efficiency correction for single variable case . . . . .	67
4.4.3 Efficiency correction for multivariate variable case . . . . .	68

4.4.4	Efficiency for K and $\Lambda$ . . . . .	74
4.5	Centrality bin width correction . . . . .	80
4.5.1	Centrality in relativistic heavy ion collisions . . . . .	80
4.5.2	Auto-correlation effect and corrections technique . . . . .	80
4.5.3	Centrality bin width effect and correction . . . . .	84
<b>5</b>	<b>Calculation of higher order cumulants using the UrQMD model . .</b>	<b>87</b>
<b>6</b>	<b>Results and discussion on the higher-order cumulants of net(K+<math>\Lambda</math>)</b>	<b>93</b>
6.1	Uncertainty estimation . . . . .	93
6.1.1	Estimating statistical uncertainty with bootstrap method . . . . .	97
6.1.2	Systematic uncertainty estimation . . . . .	102
6.2	Measurement results and discussion of higher order cumulants . . . . .	115
<b>7</b>	<b>Summary and Outlook . . . . .</b>	<b>121</b>
7.1	Summary . . . . .	121
7.2	Outlook . . . . .	122
	<b>Publication and other achievements during doctoral period . . . . .</b>	<b>131</b>
	<b>Acknowledgement . . . . .</b>	<b>133</b>

## 插图目录

1.1	大爆炸后宇宙演化的各个阶段示意图 [3]。 . . . . .	1
1.2	标准模型中基本粒子示意图 [7]。 . . . . .	4
1.3	相对论重离子碰撞过程中时空演化图像示意图 [13]。 . . . . .	9
1.4	T(温度)- $\mu$ (化学势) 平面的 QCD 相图示意图 [16]。 . . . . .	10
1.5	P(压强)-T(温度) 平面中水的相图示意图, 本图片来自网络。 . . . . .	11
1.6	P(压强)-V(体积) 平面中二氧化碳的等温线图, 本图片来自网络。 . . . . .	12
1.7	发表的文章 [32] 中轻核产额比值 $N_t N_p / N_d^2$ 随能量的变化关系。 . . . . .	15
1.8	目前已发表的结果中不同守恒荷的累积量的比值随能量的依赖关系。 . . . . .	16
2.1	布鲁克海文国家实验室相对论重离子对撞机 (RHIC) 俯瞰图。 . . . . .	19
2.2	STAR 探测器的结构示意图 [35]。 . . . . .	21
2.3	STAR 探测器的剖面图。 . . . . .	21
2.4	TPC 的整体结构示意图 [37]。 . . . . .	22
2.5	TPC 中带电粒子径迹。 . . . . .	23
2.6	MRPC 模块的结构示意图及参数 [38]。 . . . . .	24
2.7	利用 VPD 计算主碰撞顶点和碰撞开始时间的示意图。 . . . . .	25
3.1	偏度为正值和负值时随机变量概率密度函数曲线, 本图片来自百度百科。 . . . . .	29
3.2	不同峰度值的概率密度函数曲线, 本图片来自百度百科。 . . . . .	30
4.1	带电粒子位置坐标第三分量 $V_z$ 的分布, 黑色的线是加判选条件 (cut) 之前, 红色的线是加 $\text{cut}( V_z  < 30 \text{ cm})$ 之后。 . . . . .	48
4.2	加过 $V_r < 2 \text{ cm}$ cut 之后带电粒子位置坐标在 x-y 平面内的分布。 . . . . .	49
4.3	RefMult vs. TofMatch 分布用来去除堆积事例。 . . . . .	49
4.4	加了每个 cut 后有多少百分比的事例会保存下来。 . . . . .	50
4.5	金核 + 金核 27 GeV 碰撞能量下横动量 $P_t$ , 快度 $y$ , nfit, nhits, nhitsdedx 和 nFitPoss 的分布图。 . . . . .	52
4.6	金核 + 金核 27 GeV 碰撞能量下 dca, RefMult2, RefMult, nBTOF-Match 分布图 . . . . .	53

4.7 金核 + 金核 27 GeV 碰撞能量下径迹的电离能损 $dE/dx$ 关于动量乘以电荷的二维分布图。 . . . . .	53
4.8 金核 + 金核 27 GeV 碰撞能量下 TOF 质量平方关于电荷乘动量的分布。 . . . . .	54
4.9 Lambda 衰变拓扑结构图。 . . . . .	58
4.10 金核 + 金核 27 GeV 碰撞能量下 9 种不同中心度的 $\Lambda$ 不变质量谱 . . .	61
4.11 金核 + 金核 27 GeV 碰撞能量下 9 种不同中心度的 $\bar{\Lambda}$ 不变质量谱 . . .	62
4.12 金核 + 金核 27 GeV 碰撞能量下不同中心度下选取不同信号区间 $\Lambda$ 的纯度。 . . . . .	64
4.13 金核 + 金核 27 GeV 碰撞能量下不同中心度下选取不同信号区间 $\bar{\Lambda}$ 的纯度。 . . . . .	64
4.14 Au+Au 27 GeV 碰撞能量下, TPC 对 $K^-$ 的探测效率随 $p_T$ 的变化关系, 不同的颜色线代表不同的中心度。 . . . . .	75
4.15 Au+Au 27 GeV 碰撞能量下, TPC 对 $K^+$ 的探测效率随 $p_T$ 的变化关系, 不同的颜色线代表不同的中心度。 . . . . .	76
4.16 Au+Au 27 GeV 能量下 TOF 对 $K^-$ 的探测效率的 $p_T$ 依赖关系, 不同的颜色线代表不同的中心度。 . . . . .	77
4.17 Au+Au 27 GeV 能量下 TOF 对 $K^+$ 的探测效率的 $p_T$ 依赖关系, 不同的颜色线代表不同的中心度。 . . . . .	77
4.18 Au+Au 27 GeV 能量下 TPC 与 TOF 对 $K^-$ 总探测效率的 $p_T$ 依赖关系, 不同的颜色线代表不同的中心度。 . . . . .	78
4.19 Au+Au 27 GeV 能量下 TPC 与 TOF 对 $K^+$ 总探测效率的 $p_T$ 依赖关系, 不同的颜色线代表不同的中心度。 . . . . .	78
4.20 Au+Au 27 GeV 能量下 $\bar{\Lambda}$ 效率对 $p_T$ 的依赖关系, 不同的颜色线代表不同的中心度。 . . . . .	79
4.21 Au+Au 27 GeV 能量下 $\Lambda$ 效率对 $p_T$ 的依赖关系, 不同的颜色线代表不同的中心度。 . . . . .	79
4.22 相对论重离子碰撞示意图。 . . . . .	81
4.23 “RefMult” ( $ \eta <0.5$ ) 和 “RefMult2” ( $0.5< \eta <1.0$ ) 的示意图。 . . . .	82
4.24 金核 + 金核 27 GeV 碰撞能量下 RefMult2 的分布情况。 . . . . .	82
4.25 金核 + 金核 27 GeV 碰撞能量下三个不同中心度的净-(kaon+lambda) 分布, 红色标号为中心度 0-5%, 黑色标号为中心度 30-40%, 蓝色标号为中心度 70-80%。 . . . . .	83

4.26	金核 + 金核 27 Gev (Run-18) 碰撞能量下净-kaon 的二阶累积量作为 RefMult2 的函数。蓝色标号是每个 RefMult2 对应的 C2 的值, 红色标号是每个中心度的 C2 的加权平均值。每个中心度包含许多 RefMult2, 红色竖直垂直线是每个中心度对应的范围。 . . . . .	85
4.27	金核 + 金核 27 Gev (Run-18) 碰撞能量下净-lambda 的二阶累积量作为 RefMult2 的函数。蓝色标号是每个 RefMult2 对应的 C2 的值, 红色标号是每个中心度的 C2 的加权平均值。每个中心度包含许多 RefMult2, 红色竖直垂直线是每个中心度对应的范围。 . . . . .	86
4.28	金核 + 金核 27 Gev (Run-18) 碰撞能量下净-(kaon+lambda) 的二阶累积量作为 RefMult2 的函数。蓝色标号是每个 RefMult2 对应的 C2 的值, 红色标号是每个中心度的 C2 的加权平均值。每个中心度包含许多 RefMult2, 红色竖直垂直线是每个中心度对应的范围。 . . . . .	86
5.1	在相同的接受度范围内不同能量下 UrQMD 模型计算出来的净-Kaon(方形)、净-Lambda(圆形) 以及净-(Kaon+Lambda)(三角形) 的累积量, 竖线表示统计误差。 . . . . .	88
5.2	在相同的接受度范围内不同能量下 UrQMD 模型计算出来的净-Kaon(方形)、净-Lambda(圆形) 以及净-(Kaon+Lambda)(三角形) 的累积量的比值, 竖线表示统计误差。 . . . . .	88
5.3	中心度为 0-5% 时, 净-Kaon 的 $M/\sigma^2(C_1/C_2)$ (左面板)和 $S\sigma(C_3/C_2)$ (右面板) 的能量依赖关系。圆形和三角形分别表示 STAR 数据和 UrQMD 模型计算的结果。 . . . . .	89
5.4	中心度为 0-5% 时, 净-Kambda 的 $M/\sigma^2(C_1/C_2)$ (左面板) 和 $S\sigma(C_3/C_2)$ (右面板) 的能量依赖关系。圆形和三角形分别表示 STAR 数据和 UrQMD 模型计算的结果。 . . . . .	90
6.1	用打靶类比测量的示意图, 本图片来自网络。 . . . . .	94
6.2	金核 + 金核 27 GeV (Run-18) 碰撞能量下, 中心度为 70-80% 的 200 个 Bootstrap 样本的净 Kaon 累积量和累积量的比值的分布。蓝色的线是 Bootstrap 样本计算出来的累积量估计值分布的直方图, 红色的线是使用原始样本计算出来的累积量的估计值。 . . . . .	99
6.3	金核 + 金核 27 GeV (Run-18) 碰撞能量下, 中心度为 70-80% 的 200 个 Bootstrap 样本的净-Lambda 累积量和累积量的比值的分布。蓝色的线是 Bootstrap 样本计算出来的累积量估计值分布的直方图, 红色的线是使用原始样本计算出来的累积量的估计值。 . . . . .	100

6.4	金核 + 金核 27 GeV (Run-18) 碰撞能量下, 中心度为 70-80% 的 200 个 Bootstrap 样本的净 (Lambda+Kaon) 累积量和累积量的比值的分布。蓝色的线是 Bootstrap 样本计算出来的累积量估计值分布的直方图, 红色的线是使用原始样本计算出来的累积量的估计值。 . . . . .	101
6.5	不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的一阶累积量的值, 四个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是 DCA、nFit-Points、效率和 Nsigma。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的值。 . . . . .	104
6.6	不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的三阶累积量的值, 四个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是 DCA、nFit-Points、效率和 Nsigma。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的值。 . . . . .	105
6.7	不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的四阶累积量的值, 四个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是 DCA、nFit-Points、效率和 Nsigma。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的值。 . . . . .	105
6.8	不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的一阶累积量的值, 六个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是质子螺旋线到 $\pi$ 介子螺旋线最接近的距离 ( $DCA_{p\pi}$ )、质子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_p$ )、 $\pi$ 介子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_\pi$ )、重建 Lambda 时所用质子筛选条件 $ n\sigma_p $ 、重建 Lambda 时所用 $\pi$ 介子筛选条件 $ n\sigma_\pi $ 、Lambda 质量窗口。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的值。 . . . . .	106
6.9	不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的二阶累积量的值, 六个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是质子螺旋线到 $\pi$ 介子螺旋线最接近的距离 ( $DCA_{p\pi}$ )、质子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_p$ )、 $\pi$ 介子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_\pi$ )、重建 Lambda 时所用质子筛选条件 $ n\sigma_p $ 、重建 Lambda 时所用 $\pi$ 介子筛选条件 $ n\sigma_\pi $ 、Lambda 质量窗口。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的值。 . . . . .	107

6.10 不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的三阶累积量的值, 六个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是质子螺旋线到  $\pi$  介子螺旋线最接近的距离 ( $DCA_{p\pi}$ )、质子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_p$ )、 $\pi$  介子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_\pi$ )、重建 Lambda 时所用质子筛选条件  $|n\sigma_p|$ 、重建 Lambda 时所用  $\pi$  介子筛选条件  $|n\sigma_\pi|$ 、Lambda 质量窗口。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的值。 . . . . . 108

6.11 不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的四阶累积量的值, 六个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是质子螺旋线到  $\pi$  介子螺旋线最接近的距离 ( $DCA_{p\pi}$ )、质子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_p$ )、 $\pi$  介子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_\pi$ )、重建 Lambda 时所用质子筛选条件  $|n\sigma_p|$ 、重建 Lambda 时所用  $\pi$  介子筛选条件  $|n\sigma_\pi|$ 、Lambda 质量窗口。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的值。 . . . . . 109

6.12 不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的二阶累积量的值, 四个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是 DCA、nFit-Points、效率和 Nsigma。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的值。 . . . . . 110

6.13 不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的 C1/C2 的值, 四个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是 DCA、nFit-Points、效率和 Nsigma。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的值。 . . . . . 110

6.14 不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的 C3/C2 的值, 四个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是 DCA、nFit-Points、效率和 Nsigma。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的值。 . . . . . 111

6.15 不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的 C4/C2 的值, 四个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是 DCA、nFit-Points、效率和 Nsigma。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的比值。 . . . . . 111

- 6.16 不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的 C1/C2 的值, 六个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是质子螺旋线到  $\pi$  介子螺旋线最接近的距离 ( $DCA_{p\pi}$ )、质子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_p$ )、 $\pi$  介子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_\pi$ )、重建 Lambda 时所用质子筛选条件  $|n\sigma_p|$ 、重建 Lambda 时所用  $\pi$  介子筛选条件  $|n\sigma_\pi|$ 、Lambda 质量窗口。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的值。 . . . . . 112
- 6.17 不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的 C3/C2 的值, 六个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是质子螺旋线到  $\pi$  介子螺旋线最接近的距离 ( $DCA_{p\pi}$ )、质子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_p$ )、 $\pi$  介子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_\pi$ )、重建 Lambda 时所用质子筛选条件  $|n\sigma_p|$ 、重建 Lambda 时所用  $\pi$  介子筛选条件  $|n\sigma_\pi|$ 、Lambda 质量窗口。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的值。 . . . . . 113
- 6.18 不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的 C4/C2 的值, 六个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是质子螺旋线到  $\pi$  介子螺旋线最接近的距离 ( $DCA_{p\pi}$ )、质子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_p$ )、 $\pi$  介子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_\pi$ )、重建 Lambda 时所用质子筛选条件  $|n\sigma_p|$ 、重建 Lambda 时所用  $\pi$  介子筛选条件  $|n\sigma_\pi|$ 、Lambda 质量窗口。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的值。 . . . . . 114
- 6.19 净 Kaon 的前四阶累积量, 四个不同的版面对应不同的阶累积量。实心圆表示累积量的值, 直线表示统计误差, 方框表示系统误差, 粉红色的带是 UrQMD 模型的计算结果。 . . . . . 116
- 6.20 净 Lambda 的前四阶累积量, 四个不同的版面对应不同的阶累积量。实心圆表示累积量的值, 直线表示统计误差, 方框表示系统误差, 粉红色的带是 UrQMD 模型的计算结果。 . . . . . 117
- 6.21 净 (Lambda+Kaon) 的前四阶累积量, 四个不同的版面对应不同的阶累积量。实心圆表示累积量的值, 直线表示统计误差, 方框表示系统误差, 粉红色的带是 UrQMD 模型的计算结果。 . . . . . 118
- 6.22 净 Kaon 累积量的比值, 四个不同的版面分别对应不同阶累积量的比值。实心圆表示累积量比值的值, 直线表示统计误差, 方框表示系统误差, 粉红色的带是 UrQMD 模型的计算结果。 . . . . . 119

6.23 净 Lambda 累积量的比值，四个不同的版面分别对应不同阶累积量的比值。实心圆表示累积量比值的值，直线表示统计误差，方框表示系统误差，粉红色的带是 UrQMD 模型的计算结果。 . . . . . 119

6.24 净 (Lambda+Kaon) 累积量的比值，四个不同的版面分别对应不同阶累积量的比值。实心圆表示累积量比值的值，直线表示统计误差，方框表示系统误差，粉红色的带是 UrQMD 模型的计算结果。 . . . . . 120



## 表格目录

4.1	$\sqrt{s_{NN}}=27$ GeV 金核 + 金核碰撞中用于事例挑选的判选条件 . . . . .	48
4.2	分析中用到的 K 介子的径迹挑选和粒子鉴别条件 . . . . .	50
4.3	重建 $\Lambda$ 所需的质子和 $\pi$ 介子径迹筛选条件 . . . . .	57
4.4	重建 $\Lambda$ 的拓扑筛选条件 . . . . .	60
4.5	不同中心度下 $\Lambda$ 和 $\bar{\Lambda}$ 的纯度 . . . . .	63
4.6	金核 + 金核 27 Gev (Run-18) 碰撞能量下不同中心度与 $\langle N_{part} \rangle$ 以及 RefMult2 取值范围之间的对应关系。 . . . . .	83
6.1	夸克组成与粒子奇异数 . . . . .	115
6.2	净守恒荷的定义 . . . . .	116



## 第一章 研究背景

人类的好奇心是推动科学发展的动力之一，我们每个人都好奇宇宙从何而来又去往何方。现在主流的观点是宇宙起源于大约 138 亿年前的一次大爆炸，在宇宙诞生后时间和空间开始有意义，之后极短的时间内，发生过一次暴胀，暴胀期间宇宙的温度下降 [1]。

暴胀结束后，宇宙的膨胀速度减缓，宇宙中的能量开始转化为物质，参与强作用的夸克与胶子和参与电弱作用的轻子此时开始出现，此时宇宙非常炽热，是充满物质和辐射的“粒子汤”，这是一种由夸克和胶子组成的等离子体，叫做夸克胶子等离子体 (Quark Gluon Plasma:QGP)。之后随着宇宙的演化，夸克胶子等离子体开始强子化形成重子和介子，大量的介子会在很短的时间内衰变掉 [2]。

之后质子和中子结合形成原子核，这个过程持续一段时间因温度过低而停止，此时形成的元素都是较轻的元素。元素周期表中的其它较重的元素则需要是在亿万年的宇宙演化过程中通过恒星燃烧、超新星爆发、中子星合并等过程慢慢合成，但它们仍然只占宇宙中微不足道的一小部分 [1]。

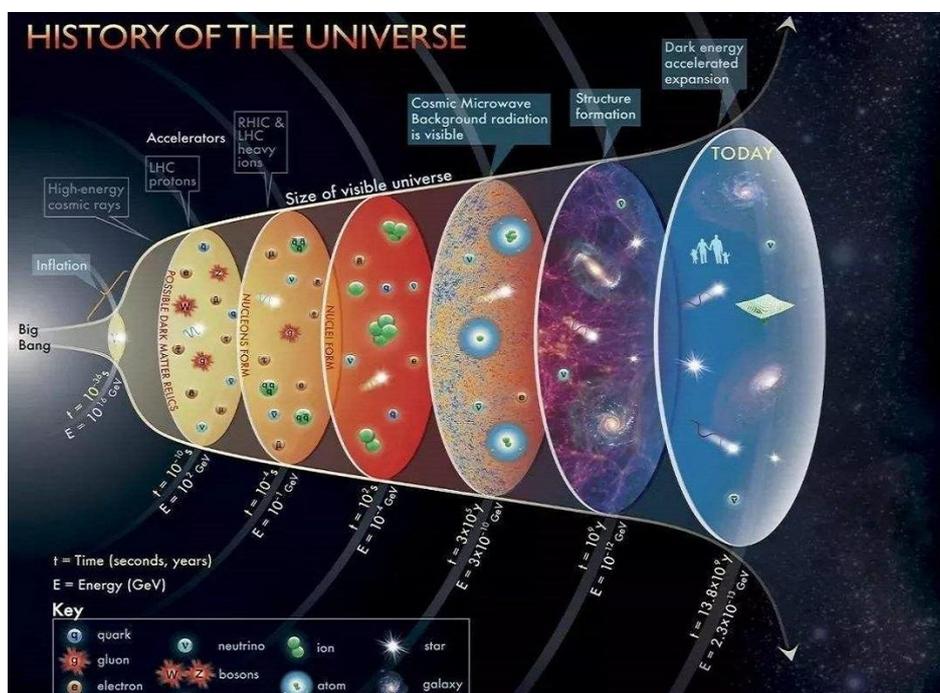


图 1.1: 大爆炸后宇宙演化的各个阶段示意图 [3]。

图1.1大爆炸后宇宙演化的各个阶段示意图，横向从左到右表示宇宙演化的时间，扇形张开的面积表示宇宙膨胀的体积。

从宇宙演化的图像我们知道，在宇宙刚刚诞生的早期大约百万分之一秒的量级内，由于极端高温高密的条件，宇宙中存在第五种物质形态——夸克胶子等离子体。物质的存在形式除了我们日常生活中常见的固态、液态、气态三态外还存在第四种形态即等离子体，它是由部分电子被剥夺后的原子及原子团被电离后产生的正负离子组成的离子化气体状物质，其主要成分是电子、带正电荷的离子和少量带负电荷的离子，以及一定数量的中性气体分子，虽然是由各种带正负电荷的粒子组成但总体上正负电荷相等，因此被称为等离子体。我们在地球上看到的闪电、极光就是等离子 [2]。

等离子体是在原子层面上将原子的部分电子剥离，作为类比我们很容易想到，原子核与电子之间通过电磁相互作用结合在一起，既然可以解除原子中原子核与电子之间的束缚，让其形成等离子体，能不能用什么办法解除原子核中强子对其内部夸克胶子的禁闭，让其成为夸克胶子等离子体。通过理论和实验研究人们发现如果提高温度或者增加重子数密度可以产生夸克胶子等离子体。如前所述，在宇宙大爆炸开始后的极短时间内满足极端高温高密的条件，那时产生过夸克胶子等离子体。因此研究夸克胶子等离子体的性质，并研究夸克胶子等离子体相到强子相相变的相图对我们理解宇宙的演化与星体的形成具有重要的意义。同时夸克胶子之间的相互作用用标准模型中量子色动力学 (QCD) 来描述，研究夸克胶子等离子体的性质对标准模型的探索与检验具有重要意义。

现在如果想要研究夸克胶子等离子体的性质，我们应该如何在地球上创造出它呢？根据量子色动力学，正常状态下夸克是被囚禁在强子中的，只有当密度极大或者温度极高时夸克才能解除禁闭形成夸克胶子等离子体。相对论重离子碰撞实验能帮我们在地球上产生夸克胶子等离子体。在实验中重离子被加速到接近光速，由于洛伦兹收缩，在运动方向上重离子的长度会变短，两个对撞的原子核被压缩成两个扁的饼状并发生相互碰撞，产生夸克胶子等离子体。

2000 年位于美国布鲁克海文国家实验室 (BNL) 的相对论重离子对撞机 (RHIC: Relativistic Heavy Ion Collider) 开始运行，它能够产生夸克胶子等离子体。STAR 是 RHIC 上的大型实验之一。相对论重离子对撞机能量扫描 (RHIC BES) 项目的目标之一是探索 QCD 相图并寻找 QCD 相变临界点 [3]。

净守恒荷分布的  $n$  阶累积量是目前经常用来寻找 QCD 相变临界点的物理量，本文将计算相对论重离子对撞能量扫描工程二期 (RHIC BESII) 金核 + 金核 27 GeV (Run-19) 对撞能量下，净 Kaon、净  $\Lambda$  和净 (Kaon+ $\Lambda$ ) 的前四阶累积量，并计算各累积量之间的比值 [4]。

如之前所述，研究夸克胶子等离子体的性质对标准模型的探索与检验具有重要意义。在这里我先简单地介绍一下粒子物理标准模型并介绍一下热力学，以此说明各阶累积量与热力学量之间的联系。

## 1.1 粒子物理标准模型

我们生活在五彩斑斓的宇宙中，大到恒星小到我们身边的一粒尘埃，从无生命的岩石到我们人类自己，从色彩艳丽的极光到看不到的空气，它们都是由物质构成。这些看似千差万别的事物有没有什么内在联系，我们设想一下，假设将它们进行分解，是会像庄子说的那样“一尺之捶，日取其半，万世不竭。”还是在分到某个层次就不能再分下去由此得到组成物质的基本成分。如果有组成物质的基本成分，这种基本成分是一种还是几种，是一种类型的“砖块”还是几种不同类型的“砖块”构造出了我们生活着的宇宙？千百年来人类对这个问题不停地思考与探索。

古希腊哲学家留基波和德谟克利特认为所有物质都是由一种看不见的微观粒子组成，他把这种粒子称为原子，类似地中国古代哲学家惠施说“至大无外，谓之大一；至小无内，谓之小一”，也认为存在不能再分的基本单元 [1]。之前这些理论大多是哲学上的思考，直到 19 世纪初道尔顿等化学家的实验结果才对原子论给予实验支持。但 1897 年汤姆逊发现了质量更小的电子，如果原子是不可再分的基本粒子显然不应该存在质量更小的电子，于是研究又到了亚原子层面，之后卢瑟福通过  $\alpha$  粒子轰击金原子的实验证明原子核的存在，很明显原子核也不是基本粒子，因为不同的原子核质量不同，最轻的原子核是普通的氢原子（相对于其同位素来说），而其他的原子核质量几乎都是氢原子核质量的整数倍。人们很自然就会猜想其它原子核是不是由氢原子核组成的，氢原子核就是质子。1932 年查德威克又发现了中子，质子和中子组成原子核。根据狄拉克的相对论量子力学还应该存在带正电荷的电子，1932 年安德森在宇宙线中发现了正电子。

之后又发现了各种介子如  $\pi$  介子和各种重子如  $\Lambda$  粒子等，还发现了许多寿命极短的粒子——共振态，尤其随着对撞机的出现大量的共振态涌现出来，现在人们已经发现了几百种粒子。如此多又杂乱无章的粒子被发现，使物理学家甚至不能记住它们的名字。人们希望找到它们之间的规律甚至对其进行分类，就像门捷列夫画出一个元素周期表一样，这样可以了解它们的性质，也便于查找 [5]。

但是很难想象几百种粒子都是基本粒子，大多数物理学家都认为这些粒子有的是基本粒子有的是由基本粒子组成的复合粒子，比如费米杨振宁就曾经提出过费米-杨模型，他们认为质子和中子是基本粒子，而  $\pi^+$ 、 $\pi^0$  和  $\pi^-$  可以由质子和中子构成。他们产生这种想法是因为假设不考虑由于它们的电荷不同引起的电磁相互作用的不同，质子和中子的性质非常相似，除电磁相互作用外它们之间的相互作用几乎是相同的，质量也非常相近，这表明质子中子之间存在  $SU(2)$  对称性，所以也把这个模型称为  $SU(2)$  模型 [6]。

当然这个模型存在许多问题，比如这个模型提出来的时候还没有发现  $\Lambda$  粒子，当  $\Lambda$  粒子被发现后，人们发现该模型不能构造出  $\Lambda$  粒子。当然后来人们又发现质子和中子并不是基本粒子，比如利用电子-质子弹性散射测量质子的电磁形状因子而得到

质子具有电荷半径，这说明质子不是点粒子，而深度非弹性散射 (DIS) 实验表明在大能量交换时，电子与质子的散射相当于电子与质子内部点粒子的“弹性散射”，这说明质子具有内部结构。虽然随着对微观世界的不断探索以及实验数据的积累，费米-杨模型以及由此推广而来的坂田模型被抛弃，但是这种对称性思想对夸克模型的提出却有启发意义。

标准模型就是以夸克模型为结构载体，在弱电统一理论以及量子色动力学的基础上逐步建立和发展起来的理论。它用来描述物质基本组成部分和它们之间的相互作用。

基本粒子按自旋可以分为两类，一类是自旋为半整数的费米子，一类是自旋为整数的玻色子。图1.2是标准模型中基本粒子示意图，图中左边的夸克和轻子是费米子，它是组成物质的基本粒子；右侧的规范玻色子是传递相互作用的基本粒子。从图中可以看出夸克有 6 种味道，他们两两配对，称为代。质量最小的，也是最稳定的称为第一代，上夸克和下夸克是第一代，质量较大稳定性较差的依次称为第二代、第三代，粲夸克和奇异夸克是第二代，顶夸克和底夸克是第三代 [7]。

### 粒子物理标准模型

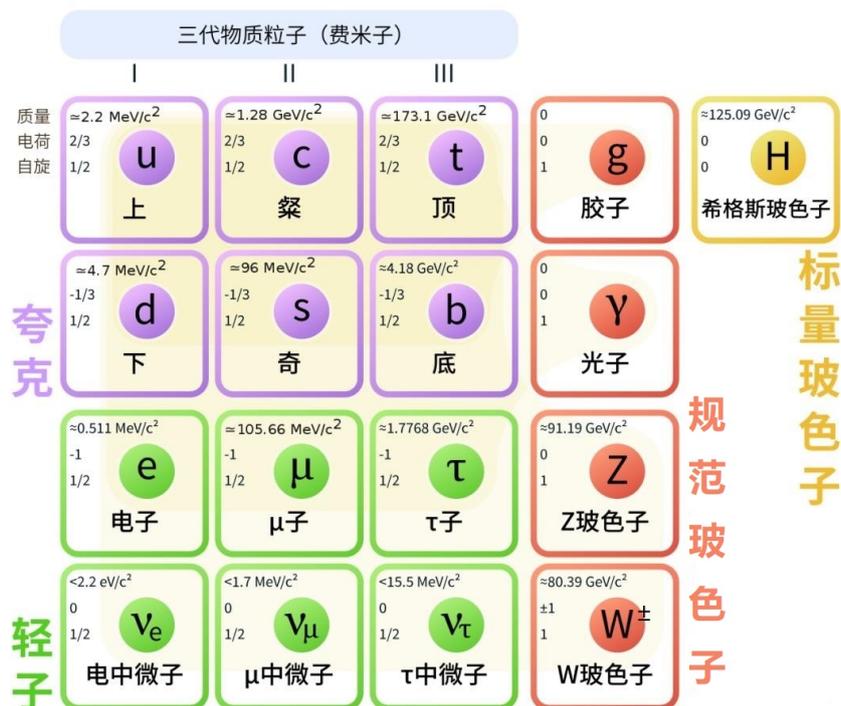


图 1.2: 标准模型中基本粒子示意图 [7]。

强子是由夸克组成，分为重子和介子。三个夸克或三个反夸克组成的强子称为重子，如质子、反质子和  $\Lambda$  粒子等；一个夸克和一个反夸克组成的强子称为介子，如  $\pi^\pm$ 、 $k^\pm$  等。现在宇宙中所有稳定的物质都是由第一代夸克组成，质子和中子构成原

子核，原子核和电子构成的原子构成了稳定的物质世界。而质子和中子都是由第一代夸克组成，其中质子由两个上夸克和一个下夸克构成而中子由一个上夸克和两个下夸克构成。质子和中子都属于重子。其它较重的粒子很快会衰变成稳定的粒子。

与夸克类似，轻子也分为了三代，电子和电子中微子是第一代； $\mu$ 子和 $\mu$ 子中微子是第二代； $\tau$ 子和 $\tau$ 子中微子是第三代。电子、 $\mu$ 子和 $\tau$ 子都带一个单位负电荷，且质量随着代数增加而增加，可以看到 $\mu$ 子和 $\tau$ 子质量已经相当大了，甚至超过了许多夸克，之所以叫它们轻子并不是因为它们质量都很轻，而是它们不能像夸克那样参与强相互作用，电子、 $\mu$ 子和 $\tau$ 子参与电弱相互作用。现在中微子振荡实验证明不同代之间中微子质量有差值，这就说明中微子有质量，至少也能说明至少有两种中微子质量不为0，中微子质量很小，不带电荷，因此不能参与电磁相互作用，只能参与弱相互作用 [6]。

这里所说的上夸克、下夸克是指夸克的味道，每种味道的夸克还有三种颜色，把它们标记为红 (r) 绿 (g) 蓝 (b)，这里所说的颜色和我们生活中所见的颜色没有关系，就像电荷数一样，只是标记夸克性质的一个新的量子数，虽然对于不同味道夸克的质量不同，但对于同一味道不同颜色质量却相同。每种夸克还都有其反夸克，因此基本粒子中夸克的种类共有  $6(\text{味道}) \times 3(\text{颜色}) \times 2(\text{反粒子}) = 36$  种。而 6 种味道的轻子不携带颜色，但都有反粒子，因此轻子的种类共有  $6(\text{味道}) \times 2(\text{反粒子}) = 12$  种。

标准模型当然不能仅仅只是对粒子进行分类并描述各种粒子的基本组成成分，它还要能描述粒子之间的相互作用。标准模型认为所有基本粒子之间的相互作用都是通过交换规范玻色子来完成的。自然界中存在四种基本相互作用：强相互作用、电磁相互作用、弱相互作用和引力相互作用。

我们最熟悉的是电磁相互作用，所有带电荷的粒子都能发生电磁相互作用，包括所有的夸克和带电的轻子，电磁相互作用是通过交换光子实现的。我们日常生活中所见到的相互作用大多是电磁相互作用。电磁相互作用的强度仅次于强相互作用，力程为无穷远。

弱相互作用可以作用在所有夸克和轻子上，但是只能同代之间发生弱相互作用。从名字可以看出弱相互作用的强度很弱，比强相互作用和电磁相互作用都弱。弱相互作用的媒介粒子有  $W^+$ 、 $W^-$  和  $Z^0$ ，它们是有质量的，不像光子和胶子那样没有质量。弱相互作用的力程很短只有  $10^{-18}\text{m}$ [1]。由于中微子只能参与弱相互作用 (引力相互作用除外)，因此有中微子出现的反应一般都是弱相互作用的标志。

就像电磁相互作用作用在电荷上一样，强相互作用作用在色荷上，所有带色荷的粒子即夸克和胶子都能发生强相互作用，因此强相互作用比电磁相互作用要复杂得多，电磁相互作用中只有正负电荷而且传递相互作用的光子不带电荷，但是色荷有红绿蓝三种、胶子更是有八种，胶子自身也带色荷因而胶子之间有自作用。强相互作用的强度在所有相互作用中是最强的，将质子和中子结合在一起形成原子核的相互作

用就是强相互作用，它显然要比电磁相互作用要强的多，因为质子都带正电，质子之间的相互作用是排斥的，要想形成原子核，强相互作用就要比这个排斥力大。强相互作用的力程小于  $10^{-15}\text{m}$ [1]，它限制在原子核内。

引力的强度是最弱的，在夸克尺度上引力要比其它三种相互作用弱很多，其力程可以达到无限远。和其他相互作用比引力在粒子尺度上的效果可以忽略不计，但在天文学领域中引力就会起重要作用，因为天体的质量很大。引力还没有纳入标准模型的框架中，虽然由激光干涉仪引力波天文台 (LIGO) 合作组的工作，已经发现引力波存在的证据，但是引力波还没有像电磁波那样被量子化，如果引力波能被量子化，那么它将成为传播引力的载体，称为引力子 [2]。

从上面的讨论，结合图1.2, 我们做一个总结，基本粒子共有 36 种夸克，12 种轻子，8 种传递强相互作用的胶子，3 种传递弱相互作用的玻色子，和 1 种传递电磁相互作用的光子，以及与粒子质量起源有关的希格斯玻色子，总共 61 种。

本文所要研究的是夸克胶子等离子体到强子相变相图的结构，而在标准模型中描述夸克胶子之间相互作用的理论是量子色动力学 (QCD)，下面我们对这个理论做一个简单介绍。

## 1.2 量子色动力学 (QCD) 简介

量子色动力学 (QCD) 是描述夸克胶子间相互作用的理论，其拉氏量密度为 [6]:

$$L_{QCD} = \bar{\psi}(x)(i\mathcal{D} - m)\psi(x) - \frac{1}{4}(F^{a,\mu\nu}F_{\mu\nu}^a) \quad (1.1)$$

其中，

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \gamma^\mu D_\mu = \gamma^\mu (\partial_\mu - igT^a A_\mu^a), \\ F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \end{aligned} \quad (1.2)$$

1.1式中  $\psi(x)$  表示夸克场，是一个三分量列矢量，它的每个分量代表一个带有颜色的夸克场，因为有三种颜色所以  $\psi(x)$  有三个分量，每一个分量自身都是一个四分量狄拉克旋量；1.1和1.2式中重复的指标表示求和， $f^{abc}$  是 SU(3) 群的结构常数，具有全反对称性。 $T^a = \lambda^a/2$ ， $\lambda^a$  是盖尔曼矩阵，共有 8 个，SU(3) 群共有 8 个生成元，盖尔曼矩阵是 SU(3) 群的生成元。 $A_\mu^a$  表示胶子场，由于 a 可以取 8 个不同的值，可以看出共有 8 种胶子。g 是 SU(3) 规范荷，类似于量子电动力学中的电荷，它标记着夸克场与胶子场之间的相互作用强度。在公式1.1中， $\bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x)$  表示夸克场的动能项， $\frac{1}{4}(F^{a,\mu\nu}F_{\mu\nu}^a)$  表示胶子场的动能项， $\bar{\psi}(x)gT^a A_\mu^a\psi(x)$  表示夸克胶子相互作用项。 $gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$  项表示胶子胶子相互作用项。

从拉氏量中可以看出存在夸克质量项但不存在胶子质量项，这说明夸克具有质量而胶子的质量为零。可以从理论上预言胶子质量为 0，因为拉氏量要满足 SU(3) 规范

对称性，而胶子的质量项会破坏这种对称性，甚至胶子场的引入也可以从规范对称性得到，因为如果只存在夸克场，拉氏量不满足局域 SU(3) 规范变换不变性，为了使其满足而引入了胶子场，因此在理论中为了使 SU(3) 规范变换不变而引入的胶子场也称为规范场。类似地在电磁相互作用和弱相互作用中引入的光子场和  $W^\pm$  和  $Z^0$  场也称为规范场。

这里解释一下规范变换，以电磁相互作用的 U(1) 规范变换为例，带电粒子如电子的状态用波函数或者场  $\psi$  来描述，其物理意义如玻恩的几率波解释， $|\psi(x)|^2$  为空间的几率分布。如果  $\psi$  乘上一个相位因子  $U=\exp(i\theta)$  变为  $\exp(i\theta)\psi$ ，很明显电子的空间几率分布在这个变换下没有改变，因此理论就要求在规范变换下波函数所遵守的基本方程的形式没有改变，这就称为物理规律的规范对称性，将  $\psi$  乘上一个相位因子的变换就叫规范变换，其可以看做是  $\psi(x)$  乘以一个  $1\times 1$  的矩阵，表示为：

$$\psi(x) \rightarrow U\psi(x), U^\dagger U = 1 \quad (1.3)$$

这里  $U=\exp(i\theta)$ ，所有这样的矩阵组成的群是 U(1) 群，因此这种变换叫 U(1) 规范变换。类似地对夸克场的变换矩阵组成的群是 SU(3) 群，所以量子色动力学满足的是 SU(3) 规范对称性。

我们注意到这里所说的  $U=\exp(i\theta)$  中的  $\theta$  是一个常数，因而这种规范叫做整体规范，如果  $U=\exp(i\theta)$  中的  $\theta$  是时间和空间的函数，即  $\theta = \theta(x)$ ，这种规范叫做局域规范，正是为了保持局域规范对称性我们必须引入规范玻色子。

夸克场和胶子场满足的 SU(3) 规范变换条件为：

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U\psi(x), U = \exp(-iT^a\theta^a) \quad (1.4)$$

$$D_\mu\psi(x) \rightarrow (D_\mu\psi(x))' = UD_\mu\psi(x) \quad (1.5)$$

因而胶子场的变换规则为：

$$T^a A_\mu^a \rightarrow U \left( T^a A_\mu^a - \frac{i}{g} U^{-1} \partial_\mu U \right) U^{-1} \quad (1.6)$$

可以证明拉氏量1.1在 SU(3) 规范变换1.4和1.6下是不变的 [8]。

根据两次规范变换  $U_1$  和  $U_2$  是否可以交换可分为 Abel 规范和非 Abel 规范，即满足  $U_1 U_2 \psi = U_2 U_1 \psi$  的称为 Abel 规范， $U_1 U_2 \psi \neq U_2 U_1 \psi$  称为非 Abel 规范。U(1) 规范是 Abel 规范而 SU(3) 规范是非 Abel 规范，这是由于 U(1) 群的生成元是对易的而 SU(3) 群的生成元是非对易的。非阿贝尔规范场的一个特点是拉氏量包含规范场的自相互作用项 [6]，它导致 QCD 中出现三胶子顶点和四胶子顶点 [9]。胶子之间的非线性相互作用导致如下重要结果：

- 渐进自由。QCD 在高能标度或者大动量转移时，跑动耦合常数  $\alpha_s(q^2)$  会变小，当  $q^2 \rightarrow \infty$  时  $\alpha_s(|q^2|) \rightarrow 0$ ，其跑动耦合常数可以表达为  $q^2$  的函数 [5]，

$$\alpha_s(|q^2|) = \frac{12\pi}{(11n_c - 2n_f) \ln(|q^2|/\Lambda_{QCD}^2)} \quad (|q^2| \gg \Lambda_{QCD}^2) \quad (1.7)$$

其中， $n_c$  表示夸克颜色的数目， $n_f$  表示夸克味道的数目。

- 夸克、胶子色禁闭。这与自然界并没有发现孤立的带色夸克和胶子相符合。由 QCD 跑动耦合常数公式 1.7 可以看到当  $q^2 \rightarrow \Lambda_{QCD}^2$  时  $\alpha_s(|q^2|) \rightarrow \infty$ ，即夸克之间的相互作用变得无穷大以致夸克不能单独分离出来。
- 可以存在极端稠密的由退禁闭的夸克和胶子组成的物质形态——夸克胶子等离子体 [9]。

夸克胶子色禁闭和渐进自由是 QCD 的两个重要性质。夸克胶子等离子体是由强子相退禁闭而形成，研究夸克胶子等离子体相和强子相的相变曲线，绘制 QCD 相图是 STAR 合作组能量扫描工程的重要物理目标，本文利用 STAR 2018 年 (Run-19) 采集的金核 + 金核碰撞能量为 27 GeV 每核子对的数据分析净-(K+Λ) 的累积量与累积量的比值，这是寻找夸克胶子等离子体相到强子相相变临界点的非常有效的物理量。下面介绍一下相对论重离子碰撞的物理图像以及如何用累积量寻找 QGP 相到强子相相变临界点。

### 1.3 相对论重离子碰撞

前面介绍过，在地球上人类可以通过相对论重离子碰撞的方法获得夸克胶子等离子体并研究它的性质。相对论重离子碰撞被称为“小爆炸”，能够产生极高的温度、极强的磁场，对物理学的研究有重要的作用 [10]。

相对论重离子碰撞是将重离子加速到接近光速，由于洛伦兹收缩，在运动方向即纵向上重离子的长度会变短，两个对撞的原子核就像两个圆盘相互碰撞 [11]。由于两个核都由许多核子组成，因此每个核子都有可能与多个核子发生碰撞，碰撞中核子损失能量，一个核子与多个核子发生碰撞因此会有大量的能量沉积在碰撞区，这叫做核阻止效应，它与夸克胶子等离子体的形成有关 [12]。对于一个沿  $z$  轴运动的粒子，根据快度公式 1.8 和赝快度公式 1.9：

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_z}{E - p_z} \quad (1.8)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{p + p_z}{p - p_z} \quad (1.9)$$

由于核阻止效应粒子的纵向动量会变小,无论是  $(E+p_z)/(E-p_z)$  还是  $(p+p_z)/(p-p_z)$  都会更倾向于接近 1, 即快度和赝快度都更倾向于接近 0, 因此核阻止效应可以看做是入射核子的快度和赝快度分布向中间快度和赝快度区间漂移的过程。所以我们会看到末态粒子在中心快度区的产额会很高, 末态粒子的快度分布提供了核阻止效应的信息 [10]。

由于在质心附近沉积了大量能量, 因此高能核碰撞提供了一种能够产生非常高能量密度区域的方法, 其碰撞中心区域可能形成夸克胶子等离子体。由于碰撞的次数越多沉积的能量越大, 而碰撞的次数取决于重离子核的厚度, 因此选用原子质量数更大的原子核更有可能产生夸克胶子等离子体 [12]。

当然核子损失的能量大小也依赖于碰撞能量, 所以 STAR 有能量扫描工程。当每个核子的能量为几 GeV 到几十 GeV 时, 碰撞的核子相互阻止可以达到非常高的重子数密度, 当能量更高时, 参与碰撞的核子相互穿透, 在碰撞的中心区会形成高温且低重子密度的物质。RHIC 能量扫描工程金核 + 金核碰撞的能量有 7.7 GeV、11.5 GeV、14.6 GeV、19.6 GeV、27 GeV、62.4 GeV、200 GeV 等, 本文主要分析了 STAR 采集的金核 + 金核碰撞能量为  $\sqrt{s_{NN}}=27$  GeV (Run-19) 的数据。

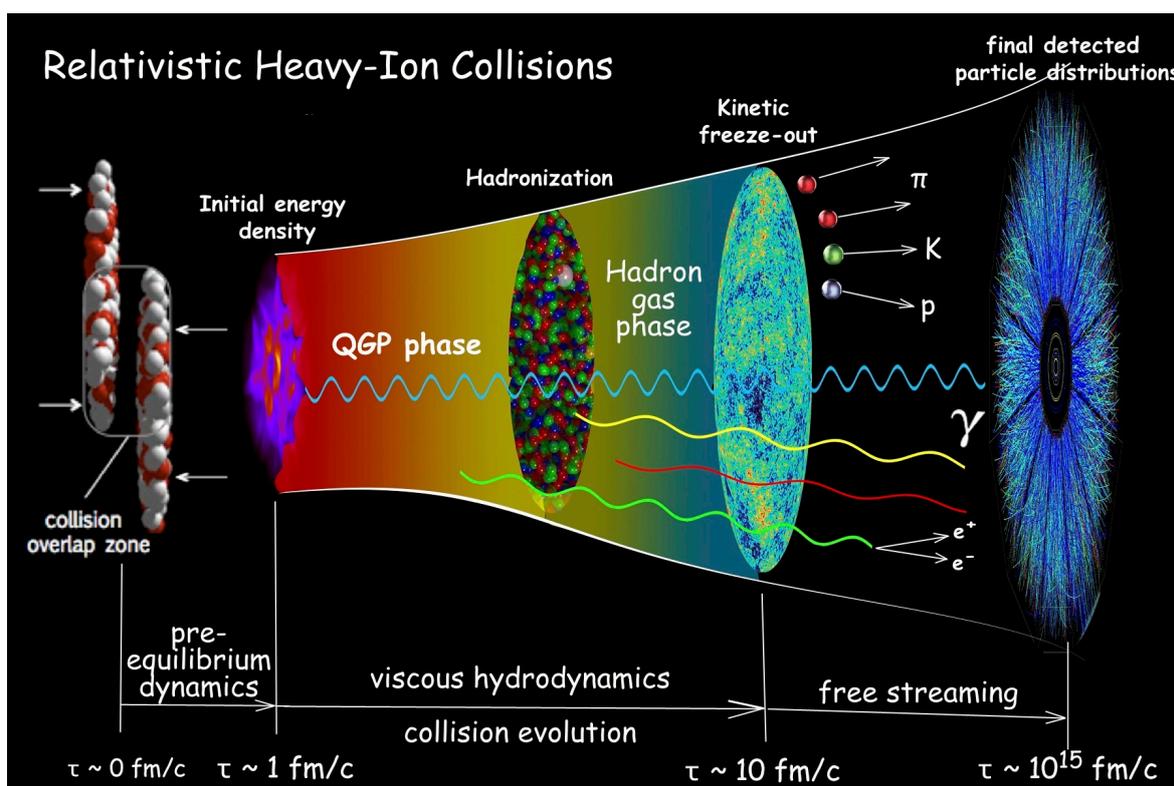


图 1.3: 相对论重离子碰撞过程中时空演化图像示意图 [13]。

图1.3是相对论重离子碰撞过程中时空演化图像示意图, 两个加速到接近光速的重离子发生碰撞, 当两个核在  $(z,t)=(0,0)$  点发生碰撞后, 如果中心快度区的能量密度足

够高可以形成夸克胶子等离子体，在最初的一段时间内等离子体没有达到热平衡，这段时间称为预平衡阶段，经过一段时间的演化，在固有时  $\tau_0$  时达到局域热平衡，这个时间尺度大约是  $1\text{fm}/c$ ，其后夸克胶子等离子体根据流体力学的规律演化，当夸克胶子等离子体膨胀时温度下降，并且在随后的某个固有时刻等离子体发生强子化，当温度降到冻结温度以下时强子从碰撞区域冻出。

我们知道夸克胶子等离子体存在的时间非常短，大约在  $1\text{fm}/c$  的时间之内，之后就 从 QGP 相变成强子相。在如此短的时间内我们不能对 QGP 进行观测，探测器只能观测到强子化后的强子的信息，我们就要根据探测到的强子的信息来研究相变曲线，并找到相变临界点。

### 1.4 寻找 QCD 相图中相变临界点的方法及研究现状

相对论重离子对撞机能量扫描 (RHIC BES) 项目的目标之一是探索 QCD 相图并寻找 QCD 相变临界点。净守恒荷分布的  $n$  阶累积量是目前经常用来寻找 QCD 相变临界点的方法 [4, 14-15]。

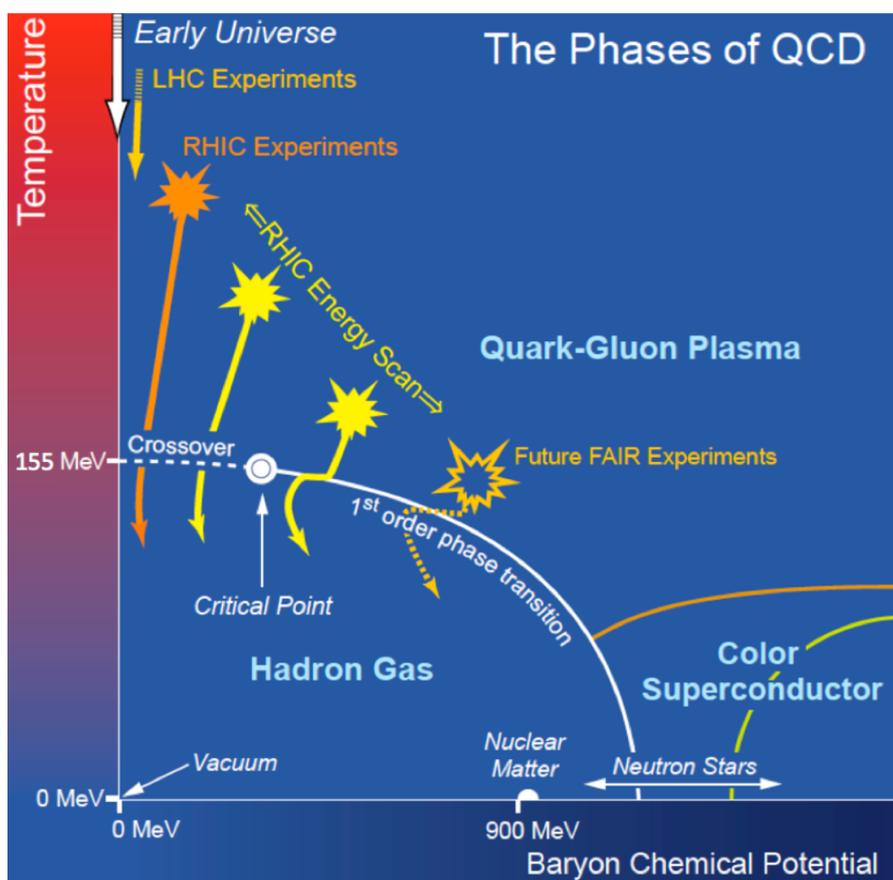


图 1.4:  $T$ (温度)- $\mu$ (化学势) 平面的 QCD 相图示意图 [16]。

图1.4是  $T$ (温度)- $\mu$ (化学势) 平面的 QCD 相图示意图。可以看出, 存在一条以  $T=0, \mu=0$  为中心的扇形弧线, 在扇形以内是夸克禁闭的强子相, 在扇形弧线以外是退禁闭的夸克胶子等离子体相, 这条弧线是一阶相变 (first order phase transition) 曲线, 可以看出这条曲线并没有闭合, 即在高重子化学势时两相之间的相变是一阶相变, 在极低化学势时两相之间的相变是平滑过渡 (Crossover), 在这两种相变之间必然存在着一个一阶相变终止的点, 即临界终止点 (critical end point), 也叫临界点。现在这个点的位置还没确定, 本文所做的工作可以用来从实验上寻找这个临界点。

从热力学与统计力学我们知道, 相变的产生是物质内部粒子之间相互作用与粒子自身热运动竞争的结果。如果粒子之间没有相互作用系统便只能永远处于无序态, 同样如果没有热运动, 系统则必定在其内部作用下形成有序态, 这两种情况都不可能产生相变。实际上, 物质内部的相互作用总是倾向于使系统趋于某种有序, 而热运动则倾向于破坏有序, 两种作用相互竞争便可在适当条件下产生由一个相到另一个相的转变 [17]。

为了便于理解我们以大家熟悉的水的相变为例解释一下。图1.5是  $P$ (压强)- $T$ (温

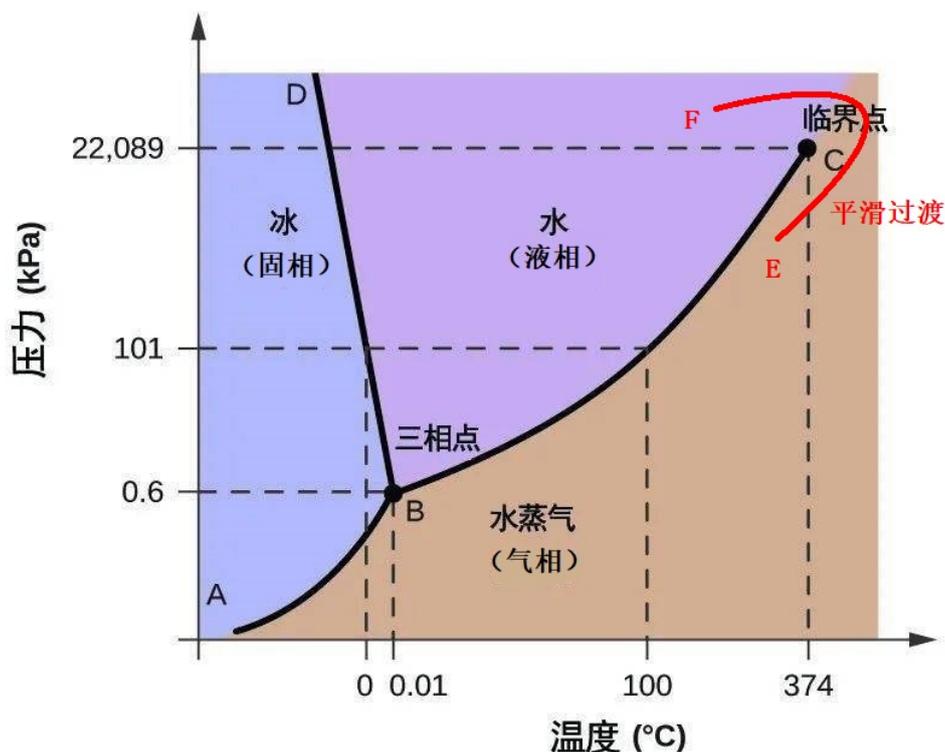


图 1.5:  $P$ (压强)- $T$ (温度) 平面中水的相图示意图, 本图片来自网络。

度) 平面中水的相图示意图, 从图中可以看出在低温高压时水是固相, 随着温度升高水为液相, 温度很高压强很低时水是气相。在每个相内部温度和压强是两个独立的物理量, 但在相变曲线上温度和压强满足一定的函数关系, 二者不是独立的。水从固相到气相的相变称为升华, 相变曲线称为升华曲线; 水从固相到液相的相变称为熔解,

相变曲线称为溶解曲线；水从液相到气相的相变称为汽化，相变曲线称为汽化曲线 [18]。在相变曲线上两相可以平衡共存。可以看到，在图中升华曲线、溶解曲线和汽化曲线交于一点，这个点称为三相点，在三相点上固液气三相可以平衡共存 [18]。

相变研究的一个基本任务是测定相图，就是找出在给定的温度  $T$ 、压强  $P$  和体积  $V$  下物质处于哪种相，并确定相边界。从日常生活经验中我们知道，在常压下，即图中  $101\text{ kPa}$  时，当温度低于  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  时，水处于固态也就是冰，保持压强不变，升高温度，到达  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  时水吸热但温度不变，吸收的热量用于融化冰，这部分热量是相变潜热，此时处于固液共存阶段，当冰全部汽化，温度会继续升高，此时全部变成液相也就是水，当继续加热到  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  时水开始汽化，同样由于相变潜热水吸收热量但温度不升高直到全部汽化成水蒸气。

我们很自然地会想到一个问题，汽化曲线会随着温度的升高和压强的变大一直延伸还是到某一个位置停止。人们知道对液态物质加热最终都会变成气态物质，但压强不同时这种变化有什么差别，即在  $P$ - $T$  图上从不同的“路线”变过去有什么不同人们并不清楚。直到英国物理学家安德鲁斯 (Andrews) 研究二氧化碳的相图 [19]。

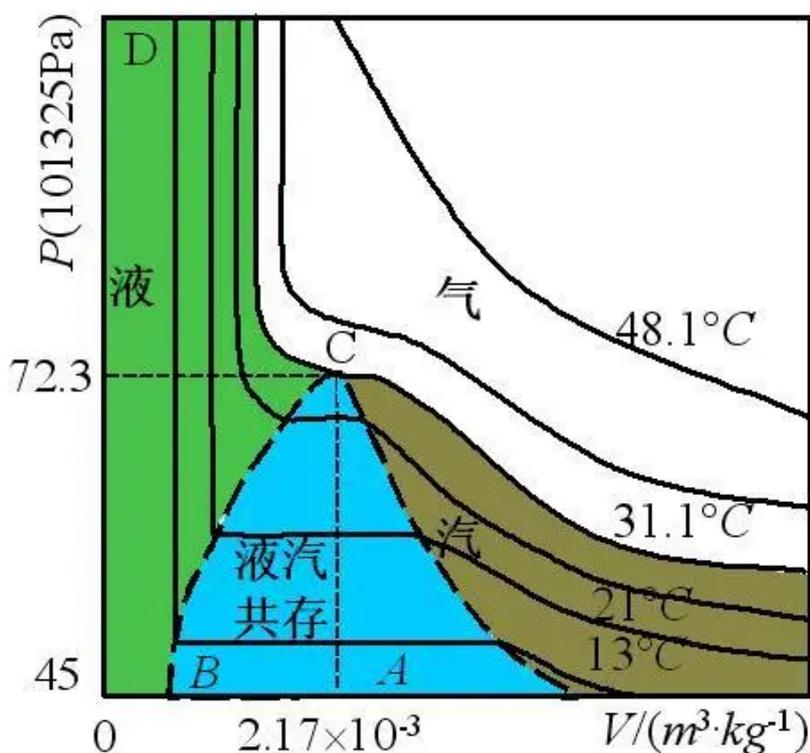


图 1.6:  $P$ (压强)- $V$ (体积) 平面中二氧化碳的等温线图, 本图片来自网络。

图1.6是  $P$ (压强)- $V$ (体积) 平面中二氧化碳的等温线图。我们先看温度为  $13.1\text{ }^{\circ}\text{C}$  的这条曲线，线的左端等温线几乎与  $P$  轴平行，说明这段曲线压强变化对体积几乎没有影响，代表二氧化碳处于液态；与体积轴平行的那段代表气液共存相，因为气液

共存时温度和压强满足一个函数关系，当温度确定时压强也是确定的不论体积怎么变；最右边一段代表气相，其等温线服从理想气体状态方程。

我们可以看出随着温度升高气液共存的曲线在缩短，当温度达到  $31.1^\circ\text{C}$  时刚好消失。安德鲁斯发现在这个温度附近二氧化碳气态和液态的密度差别基本消失，这对应着气液相界限有个明确的终点，他把它称为“临界点”。所谓“临界”是指超过这个点以后气态和液态的差别不复存在，再问物质究竟处于气态或液态是没有意义的，安德鲁斯认为临界点以上分不出气液相 [19]。

当然不只二氧化碳存在临界点，水同样存在临界点，在图1.5中 C 点代表临界点，如果水从相图中的气相 E 点按照红色曲线绕过临界点变化到液相 F 点，就可以不经过气液共存的阶段使气相连续地转变到液相，这个过程就叫做平滑过渡 (Crossover)。本论文就是在 QCD 相图中寻找临界点，如图1.4中标的“Critical Point”。

净守恒荷高阶累积量近些年被广泛地用来寻找 QCD 相图中的相变临界点 [20-21]。高阶累积量和热力学中的感受系数相联系。在热力学量中，热力学极限下压强  $P$  可以表示为 [22]：

$$p(T, \mu_B, \mu_Q, \mu_S) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{T}{V} \ln Z(T, V, \mu_B, \mu_Q, \mu_S) \quad (1.10)$$

这里  $T$  和  $V$  分别是系统的温度和体积， $Z$  是配分函数。守恒荷  $B$ 、 $Q$  和  $S$  分别表示重子数、电荷和奇异数，化学势分别用  $\mu_B$ 、 $\mu_Q$ 、 $\mu_S$  表示。某个守恒量  $q$  的  $n$  阶热力学感受系数可以定义为 [22]：

$$\chi_q^{(n)} = \frac{\partial^n [p/T^4]}{\partial (\mu_q/T)^n}, q = B, Q, S \quad (1.11)$$

把压强的公式1.10带入  $n$  阶感受系数的定义式1.11可以计算出  $\chi_q^{(1)}$ ，

$$\begin{aligned} \chi_q^{(1)} &= \frac{\partial [\frac{1}{T^3V} \ln Z]}{\partial (\mu_q/T)} = T \frac{\partial [\frac{1}{T^3V} \ln Z]}{\partial \mu_q} \\ &= \frac{1}{T^3V} T \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu_q} = \frac{1}{T^3V} \langle N_q \rangle = \frac{1}{T^3V} c_{1q} \end{aligned} \quad (1.12)$$

其中用到了热力学公式 [17]，

$$\langle N \rangle = T \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} \right)_{\beta V} \quad (1.13)$$

同样可以计算二阶感受系数，

$$\begin{aligned} \chi_q^{(2)} &= \frac{\partial^2 [\frac{1}{T^3V} \ln Z]}{\partial^2 (\mu_q/T)} = \frac{\partial \chi_q^{(1)}}{\partial (\mu_q/T)} = \frac{\partial (\frac{1}{T^3V} \langle N_q \rangle)}{\partial (\mu_q/T)} \\ &= T \frac{\partial (\frac{1}{T^3V} \langle N_q \rangle)}{\partial \mu_q} = \frac{1}{T^3V} T \frac{\partial \langle N_q \rangle}{\partial \mu_q} = \frac{1}{T^3V} c_{2q} \end{aligned} \quad (1.14)$$

其中用到了热力学公式,

$$\langle N^2 \rangle = T \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \mu} + \langle N \rangle^2 \quad (1.15)$$

我们可以一直计算下去, 得到净守恒荷  $q$  分布的  $n$  阶矩  $c_q^n$  是和相应守恒荷  $q$  的  $n$  阶热力学感受系数  $\chi_q^n$  的关系,

$$c_q^n = VT^3 \chi_q^{(n)} \quad (1.16)$$

此外, 其它基于 QCD 的模型计算 (如  $\sigma$  模型 [21, 23]) 表明, 系统的关联长度与守恒荷的各个矩有以下关系 [23-25]:

$$\begin{aligned} c_2 &= \langle \sigma_V^2 \rangle = VT\xi^2; \\ c_3 &= \langle \sigma_V^3 \rangle = 2\lambda_3 VT^2 \xi^6 \\ c_4 &= \langle \sigma_V^4 \rangle_c = 6VT^3 [2(\lambda_3 \xi)^2 - \lambda_4] \xi^8 \end{aligned} \quad (1.17)$$

这里  $\langle \sigma_V^4 \rangle$  是  $\sigma$  场的四阶累积量。

在 QCD 相图上, 临界点是一级相变线的终点, 其最重要的特征是关联长度发散, 系统关联长度发散会导致系统在临界点附近一系列独特的性质, 如涨落发散等 [26-27, 24]。当相对论重离子对撞能量扫描时, 不同碰撞能量产生的高温高密核物质的化学冻结温度和重子化学势也将发生改变 (能量越低, 温度越低, 重子化学势越大), 在 QCD 相图中会随着能量的改变而穿过临界区域 [3]。由于关联长度在临界点是发散的 (即  $\xi \rightarrow \infty$ ), 因此在靠近临界点、穿过临界点附近、远离临界点时关联长度必须先增大后减小。因此在重离子碰撞能量扫描中, 当临界区域被穿过的时候, 临界点的一个特征信号就是关联长度会存在一个非单调的行为。

但是在实验上关联长度不容易直接测量, 根据公式1.17可以看出关联长度是和  $\sigma$  场的累积量有关系的, 但遗憾的是  $\sigma$  场的累积量也没办法直接测量, 但是  $\sigma$  场可以影响粒子的产生, 因此  $\sigma$  场的波动会影响可观测粒子多重数分布的波动。同时注意公式1.17中包含体积项, 由关联长度  $\xi$  在临界点发散可以推断出在穿过临界点附近时关联长度先增大后减小, 但累积量穿过临界点时先增大后减小并不能一定推断出存在临界点, 因为累积量还受到系统体积的影响, 不同的碰撞能量产生的热密物质的体积也不相同。为了消除体积影响, 把两个累积量相除, 从公式1.17可以看出更高阶累积量与更高的关联长度的幂次相关, 因此发散速度更快, 如果用  $c_4$  除以  $c_2$ , 比值仍然和关联长度相关但没有体积项。实验上我们通过累积量的比值对碰撞能量的非单调行为来寻找相变点 [28, 3, 25]。和关联长度类似, 从公式1.16可以看出, 当将感受系数与累积量联系起来时, 会出现一个体积项, 这使得很难比较不同的碰撞系统和碰撞中心度 [4], 而且在相对论重离子对撞中, 我们通常很难知道系统的体积, 所以我们用感受系数的比值来消除体积项。

$$\frac{c_q^n}{c_q^m} = \frac{\chi_q^{(n)}}{\chi_q^{(m)}} \quad (1.18)$$

从公式1.18可以看出，不同系统的感受系数的比值都等于累计量的比值，我们不需要知道系统的体积，只要知道累积量的比值就能知道系统感受系数的比值。

由于多种粒子都携带重子数和奇异数，由于各种原因，很难在统计时包含所有粒子。在之前的研究中一般用净质子数代表净重子数，用净 K 介子数代表净奇异数或者用净  $\Lambda$  数代表净奇异数。在之前的研究中，净电荷数 [4]、净 Kaon 数 [15]、净 Lambda 数 [15] 以及净质子数 [15] 分布的累积量以及累积量的比值都已经被人做过细致的研究。图1.8是目前已发表的结果中不同守恒荷的累积量的比值随能量的依赖关系，由于统计误差太大，在这几篇文章中还没有看到明显的累积量比值随能量的非单调行为。

在最近发表的利用 STAR 采集的金核 + 金核碰撞能量为 3 GeV 的固定靶实验数据，测量净质子数的高阶累积量的比值，结合之前发表的数据 C4/C2 显示出对能量的非单调依赖 [29]。

为了提高测量的精度（增加高样本容量可以减小统计误差），同时为了测量相图中更多的点，RHIC 进行了能量扫描工程二期实验，采集了更多的数据，而且净 (K+ $\Lambda$ ) 数比单纯的净 K 介子数或者净  $\Lambda$  数可以更全面的反映奇异数的情况，本文测量了 RHIC 能量扫描工程二期净 (K+ $\Lambda$ ) 数分布的高阶累积量以及累积量的比值。

另外，最近重离子碰撞中轻核的产额比被预言是寻找 QCD 相变临界点的灵敏探针，在临界点附近，组成轻核的核子有很大涨落 [26, 30-31]。在 RHIC-BES 项目中的轻核产额比值  $N_t N_p / N_d^2$  (其中  $N_t$ 、 $N_p$  和  $N_d$  分别是氘核产额、质子产额和氦核产额) 在中心快度区 ( $|y| < 0.5$ ) 的中心碰撞中发现了轻核产额比值随着对撞能量的非单调性行为 [32, 26]。图1.7是发表的文章 [32] 中轻核产额比值  $N_t N_p / N_d^2$  随能量的变化关系。

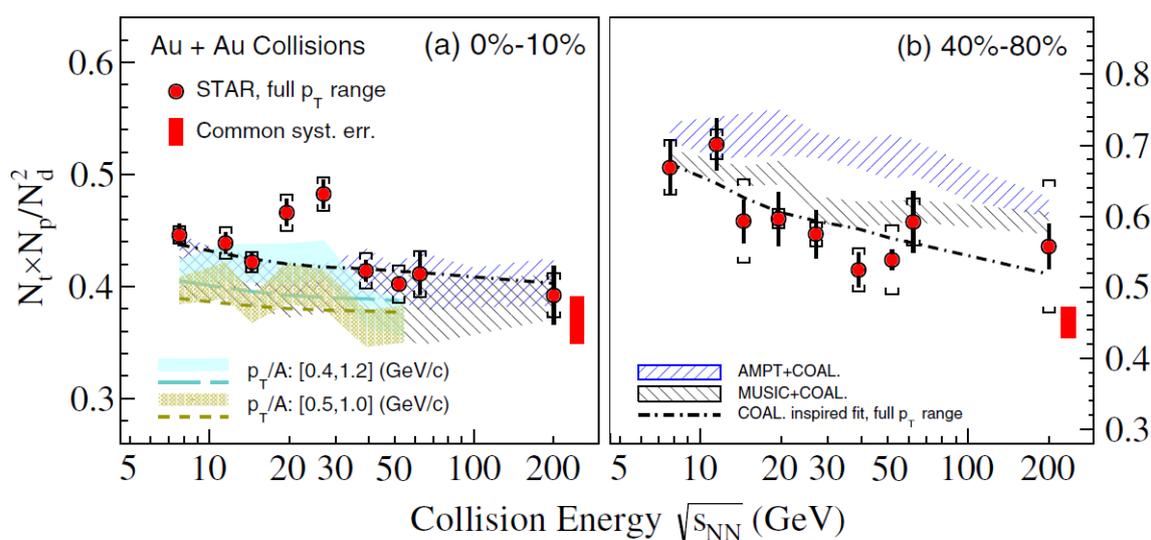
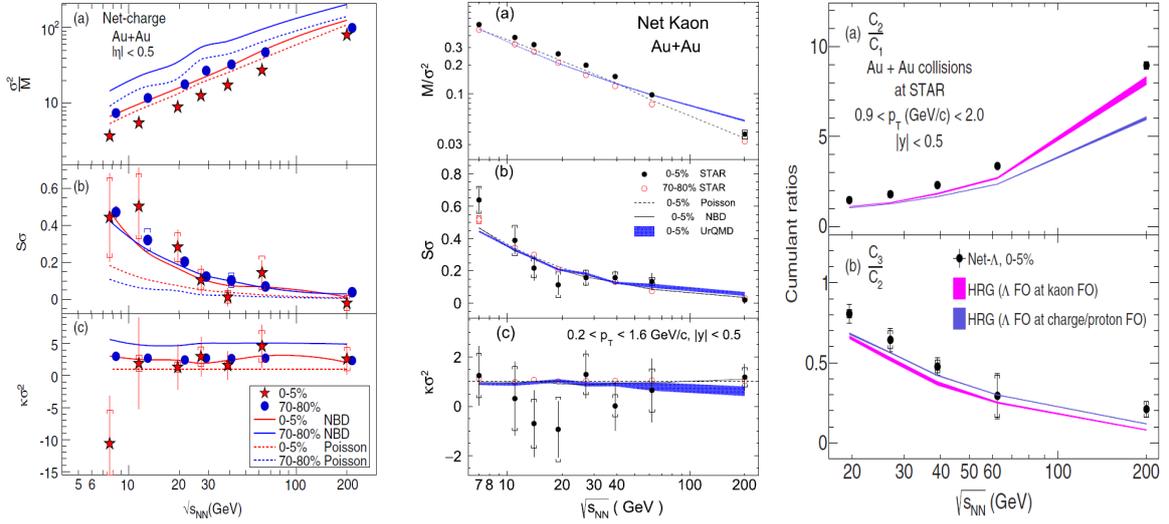
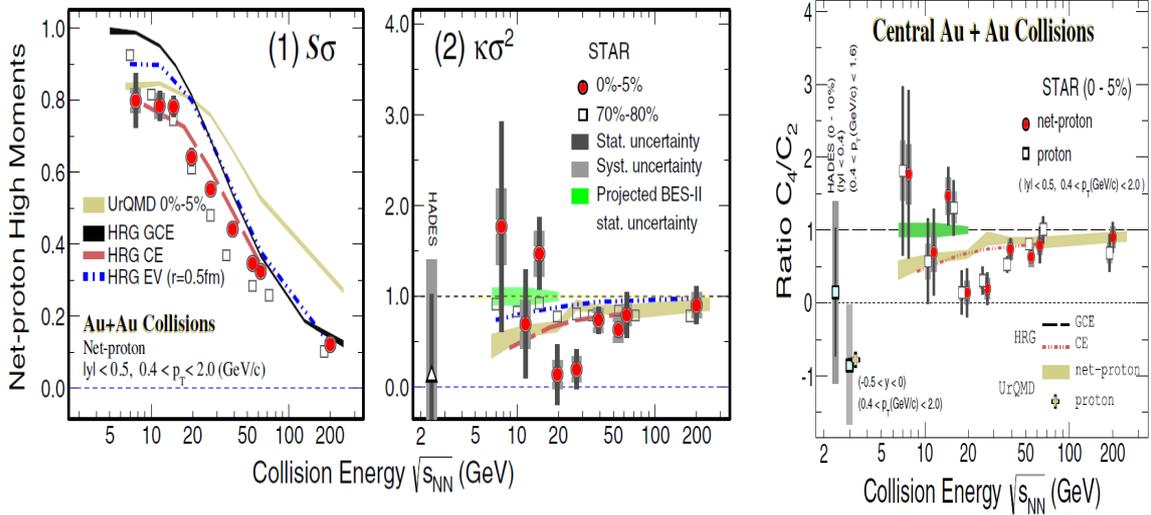


图 1.7: 发表的文章 [32] 中轻核产额比值  $N_t N_p / N_d^2$  随能量的变化关系。



(a) 文章 [4] 中净电荷数分布的累积量的比值随能量的依赖关系。 (b) 文章 [15] 中净 Kaon 数分布的累积量的比值随能量的依赖关系。 (c) 文章 [33] 中净 Lambda 数分布的累积量的比值随能量的依赖关系。



(d) 文章 [14] 中净质子数分布的累积量的比值随能量的依赖关系。 (e) 文章 [29] 中净质子数分布的累积量的比值随能量的依赖关系。

图 1.8: 目前已发表的结果中不同守恒荷的累积量的比值随能量的依赖关系。

## 1.5 论文的结构安排

本论文的结构安排如下：

- 第一章介绍了研究背景，包括什么是相变临界点、如何在实验上寻找 QCD 相图中的相变临界点以及寻找相变临界点的研究现状。
- 第二章介绍了实验装置，包括相对论重离子对撞机 (RHIC), 以及 STAR 上的两个子探测器——时间投影室 (TPC) 和飞行时间探测器 (TOF)
- 第三章介绍了随机变量分布函数的数值特征，包括矩、中心矩、累积量、阶乘累积量以及它们的生成函数。尤其是多变量情况下的累积量和阶乘累积量，第四章测量净 ( $\Lambda + K$ ) 高阶累积量时用到。
- 第四章介绍实验数据分析，首先进行粒子鉴别和  $\Lambda$  重建，之后推导出实际产生的粒子和探测到的粒子通过线性组合成的一个新的随机变量阶乘累积量之间的关系，并用其进行效率修正，在那一小节中还展示了 K 介子和  $\Lambda$  粒子的重建效率。之后对测量结果进行了中心度宽度修正。
- 第五章介绍了用 UrQMD 模型计算重离子碰撞中的高阶累积量，本章中计算了 7.7、11.5、19.6、27、39、62.4 和 200 GeV 7 个能量点的累积量及其比值，可以作为实验测量的基线。
- 第六章介绍了净 ( $K + \Lambda$ ) 高阶累积量测量结果与讨论，在本章中首先介绍了 Bootstrap 方法并用其估计了统计误差，之后又估计了系统误差。
- 第七章是对本论文的总结与展望。



## 第二章 实验装置

本论文分析所用的是金核 + 金核碰撞能量为 27 GeV (Run-19) 的数据, 这是 2018 年 STAR 合作组在相对论重离子对撞机 (RHIC: The Relativistic Heavy Ion Collider) 上采集的数据。STAR 是 Solenoidal Tracker at RHIC 的缩写, 它的意思是 RHIC 上的螺线管径迹探测器。STAR 探测器是位于美国纽约长岛布鲁克海文国家实验室 (BNL) 相对论重离子对撞机上的大型探测器之一。下面我们对实验设备即实现离子对撞的相对论重离子对撞机和实现粒子探测的 STAR 探测器进行简单的介绍。

### 2.1 相对论重离子对撞机

RHIC 周长约 3.8 千米, 可以对撞质子、氘核等轻元素以及铜核、金核、铀核等重元素, 并能够进行碰撞能量 (每核子对的质心能量) 从低到高扫描 [34]。RHIC 从 2000 年开始运行, 本文分析所采用的数据是 2018 年采集的数据, 是运行的第 19 年, 所以编号为 Run-18。图 2.1 是布鲁克海文国家实验室相对论重离子对撞机 (RHIC) 俯瞰图。



图 2.1: 布鲁克海文国家实验室相对论重离子对撞机 (RHIC) 俯瞰图。

相对论重离子对撞机由多级的粒子加速系统组合而成, 以金核 + 金核对撞为例, 首先通过 Tandem Van de Graaff 剥离束流中的部分电子, 并对束流进行初步加速; 然后离子被送到增强器 (Booster synchrotron) 中, 在增强器中金离子被进一步电离且被进一步加速; 之后金离子被注入到 AGS 中进一步加速, 并通过 AGS-to-RHIC Beam Transfer Line 注入到 RHIC 两个束流环中, 金离子在 AGS 出口处被完全剥离到电荷为 +79 的状态 [34]; 在 RHIC 束流环内束流被加速到想要的能量。

粒子束流通过多级加速后, 储存在 RHIC 环中, RHIC 环由两个存储环组成, 束流沿逆时针方向运动的称为“黄环”, 束流沿顺时针方向运动的称为“蓝环”, 两个环有 6 个相交的点, 束流在这 6 个点发生碰撞。

RHIC 每次注入束流, 并把束流加速、储存和对撞称为一个注入 (Fill), 每个 Fill 大约持续几个小时, 之后由于粒子对撞导致束流亮度降低而被停掉, 进入下一个 Fill。STAR 采集数据是以“run”为单位, 每个 run 都有固定的编号“run number”来区分不同的 run, 每个 Fill 会分成多个 run 来采集数据。

## 2.2 RHIC 上的螺线管径迹探测器——STAR

STAR 位于 RHIC 束流环的六点钟位置, STAR 探测器是一个包含了众多子系统的大型复合探测器, 在方位角方向探测器可以接受  $2\pi$  方位角的粒子, 即对方位角实现全覆盖; 在极角方向对赝快度的接受区间约为  $-1.0 < \eta < 1.0$ 。图 2.2 是 STAR 探测器的结构示意图。为了更好地展示它们, 把剖面图放在了图 2.3。

STAR 探测器的最外层是一个大螺线管磁铁, 它能够提供一个稳定的强度最高达到 0.5 T 的磁场 [36], 内部是各个子探测器, STAR 主要的子探测器有:

- 时间投影室 (TPC), Time Projection Chamber[37].
- 飞行时间探测器 (TOF), Time of Flight Detector[38].
- 顶点位置探测器 (VPD) Vertex Position Detector[39].
- 桶部电磁量能器 (BEMC), Barrel Electromagnetic Calorimeter[40].
- 端盖电磁量能器 (EEMC), Endcap Electromagnetic Calorimeter[41].
- 束流计数器 (BBC), Beam Beam Counter[42].
- 零度量能器 (ZDC), Zero Degree Calorimeter[43].
- $\mu$  子探测器 (MTD), Muon Telescope Detector[44].
- 重味径迹探测器 (HFT), Heavy Flavor Tracker[45-46].

# STAR Detector

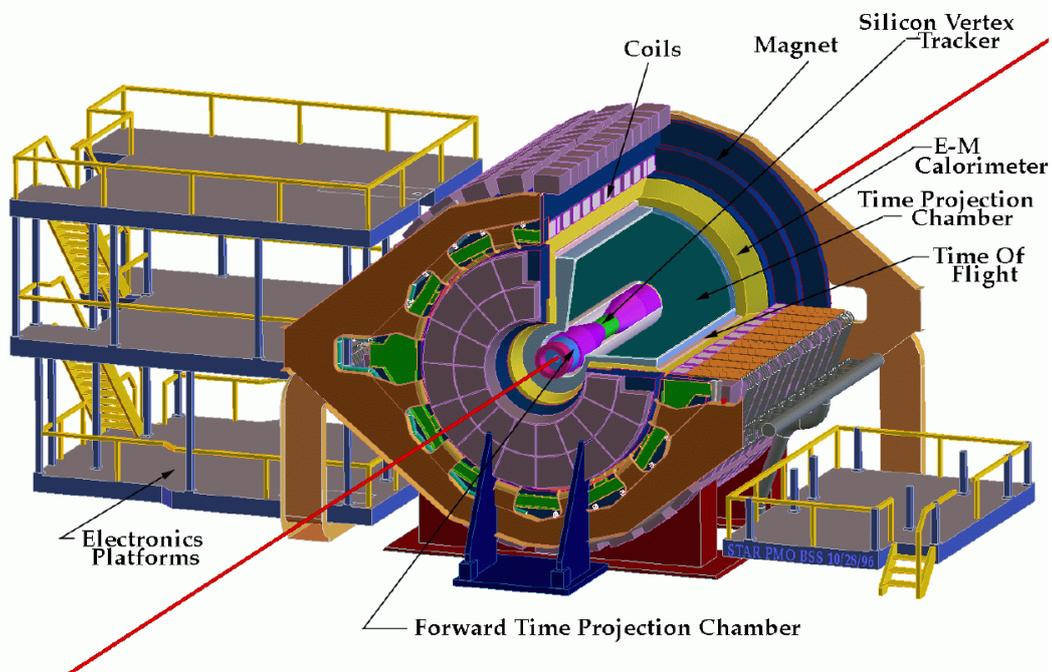


图 2.2: STAR 探测器的结构示意图 [35]。

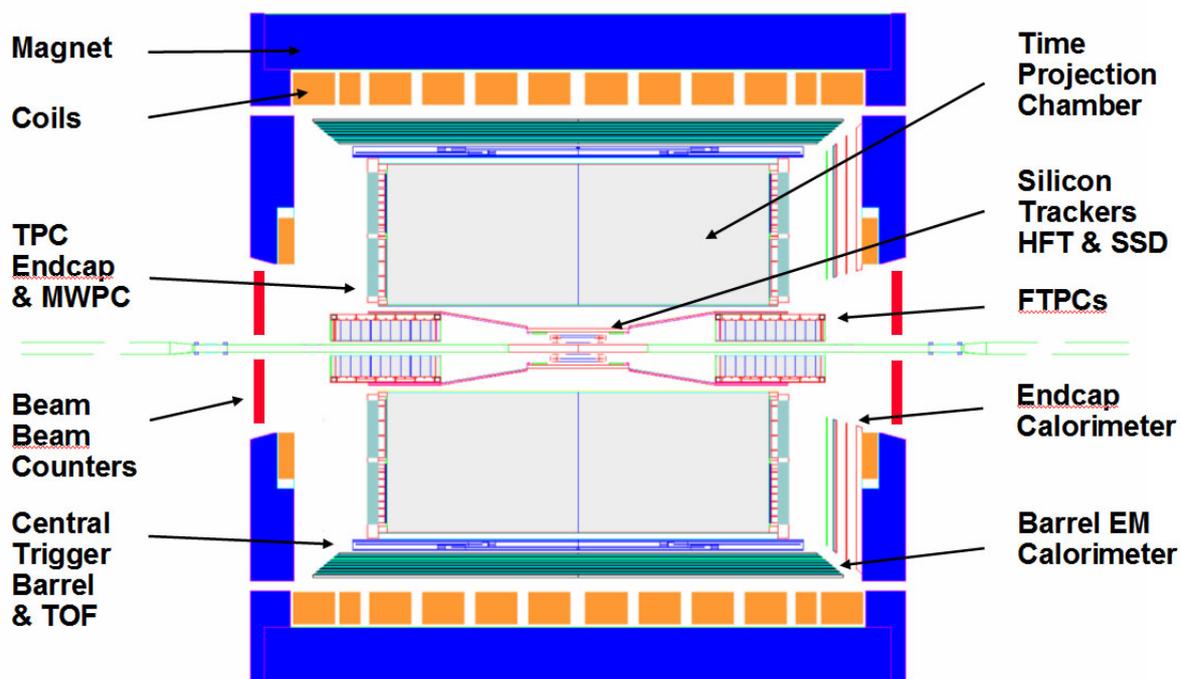


图 2.3: STAR 探测器的剖面图。

- 前向介子谱仪 (FMS), Forward Meson Spectrometer[47].

本论文分析中所需要用到的探测器主要是时间投影室 (TPC) 和飞行时间探测器 (TOF), 用这两个探测器来鉴别带电粒子, 下面简单介绍一下这两个子探测器。

### 2.2.1 时间投影室——TPC

时间投影室 (the Time Projection Chamber, TPC) 是 STAR 最主要最核心的子探测器, 占据了 STAR 的大部分空间, 是粒子径迹探测的最主要设备。TPC 可以记录带电粒子在磁场中的飞行径迹, 并基于飞行径迹给出粒子的电荷、动量等信息, 同时可以探测粒子在气体中运动时的能量损失并基于此实现粒子种类鉴别 [48]。TPC 主体由圆筒状漂移室和桶底部的多丝读出系统组成。TPC 的整体结构和各部分参数如图2.4所示。

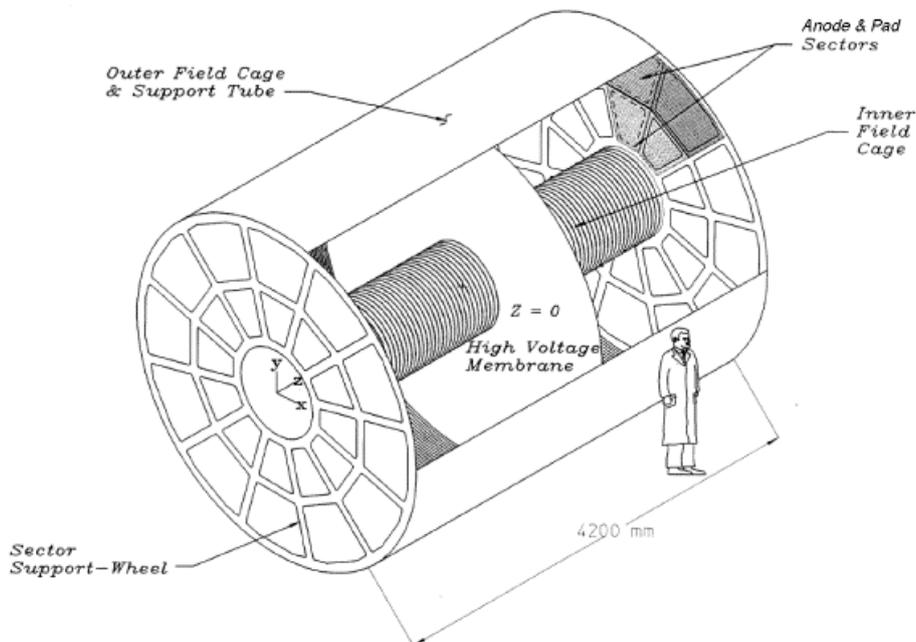


图 2.4: TPC 的整体结构示意图 [37]。

时间投影室长 4.2 m, 内径 50 cm, 外径 200 cm, 内部是一个封闭空间, 里面充满工作气体 P10 (它是由 90% 氙气和 10% 甲烷混合而成的气体) [37]。腔室中间的膜提供负高压, 电压约为 -28 kV, 两端接地; 为腔室提供一个水平方向的匀强电场, 电场方向为从两端指向中间, 电场强度为  $E=135 \text{ v/cm}$ , 保证电子可以漂移到端盖, 磁感应强度为  $B=0.5\text{T}$ [37]。

TPC 的读出系统位于圆筒两端, 每一侧都分为 12 个扇形区域, 每个扇形区域又进一步分为内外两部分, 每块扇区实质上是有读出电路板的多丝正比室 (MWPC) [37]。

带电粒子在工作气体中运动产生电子-离子对，电子在电场的相互作用下发生漂移，漂移电子的初速度很小，沿电场方向漂移到端盖处发生雪崩，磁场的方向平行于电场，因此电子不会受磁场的影响而产生横向运动。在 Pad 板上产生感应电荷，就得到带电粒子的一个点的 x-y 坐标，多个点就可以确定一条径迹 [37]。图2.5展示了 TPC 中带电粒子径迹图。

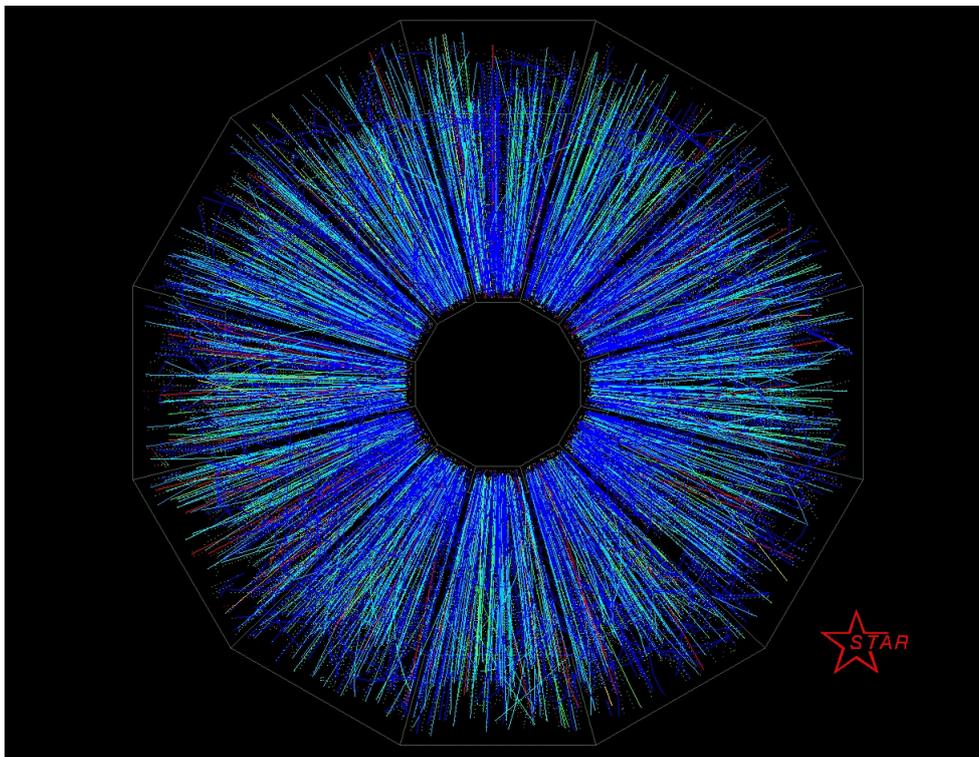


图 2.5: TPC 中带电粒子径迹。

TPC 通过测量带电粒子穿过气体室时的电离能损失来鉴别粒子的种类。由于可以知道 TPC 工作的磁场的磁感应强度，因此带电粒子的动量也可以通过它们径迹的曲率来计算。知道动量后，我们可以把这些粒子能量损失关于动量的函数与 Beth-Bloch 公式曲线描述的理论电离能量损失进行比较来进行粒子鉴别。公式2.1就是 Beth-Bloch 公式 [48]

$$-\frac{dE}{dx} = 4\pi N_a r_e^2 m_e c^2 z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[ \ln \left( \frac{2m_e c^2}{I} \beta^2 \gamma^2 \right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right] \quad (2.1)$$

其中， $N_a$  是阿伏伽德罗常数， $r_e = e^2/(4\pi\epsilon_0 m_e c^2)$  是经典电子半径， $m_e$  是电子的静止质量， $c$  是真空中光速， $z$  为入射粒子的电荷数， $Z$  为介质原子的原子序数， $A$  为介质原子的原子质量数 [48]， $\beta = v/c = pc/E$ ， $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ ， $I$  是介质的电离常数也叫平均激发能，它的值取决于所穿越物质的性质，可近似的表达为  $I = 16Z^{0.9} eV$ ， $\delta$  是介质密度效应修正参数，随着入射粒子的能量提高，带电粒子产生的电场会集中

到垂直于粒子运动方向的平面内，场强增加，因而能够同更远处的物质发生散射。然而，物质在此电场中发生极化，附加的极化电场限制了粒子自身电场的扩展，从而有效地抑制了这种效应。如其名所示，介质密度效应修正参数对不同密度的介质其值是不同的，它在致密的物质中更加明显。注意，这里  $dx = \rho \cdot ds$ ,  $\rho$  是介质的密度，它的单位为  $g/cm^3$ ,  $ds$  是长度，单位为  $cm$ , 所以  $dx$  的单位为  $g/cm^2$ , 它可以理解为面密度，这样选取的好处是能损在很大程度上与物质的具体性质无关 [49]。

### 2.2.2 飞行时间探测器——TOF

我们知道随着动量变高，大约在  $0.7 \text{ GeV}/c$  时仅仅使用 Beth-Bloch 公式不能对质子、 $\pi$  介子、和  $K$  介子做很好的鉴别，因为他们的 Beth-Bloch 公式曲线非常接近；为了提高这个动量区间的粒子鉴别能力，STAR 合作组建造了飞行时间探测器 (TOF) 子系统 [38]。

TOF 安装在 TPC 的外侧，其覆盖范围与 TPC 基本相同。在 STAR 探测器的子系统中 TOF 具有良好的时间分辨性能，其时间分辨率为  $100 \text{ ps}$ [38], TOF 系统的建造是基于相对较新的技术，称为多气隙电阻板室 (MRPC:multi-gap resistive plate chamber)[50] 的技术。

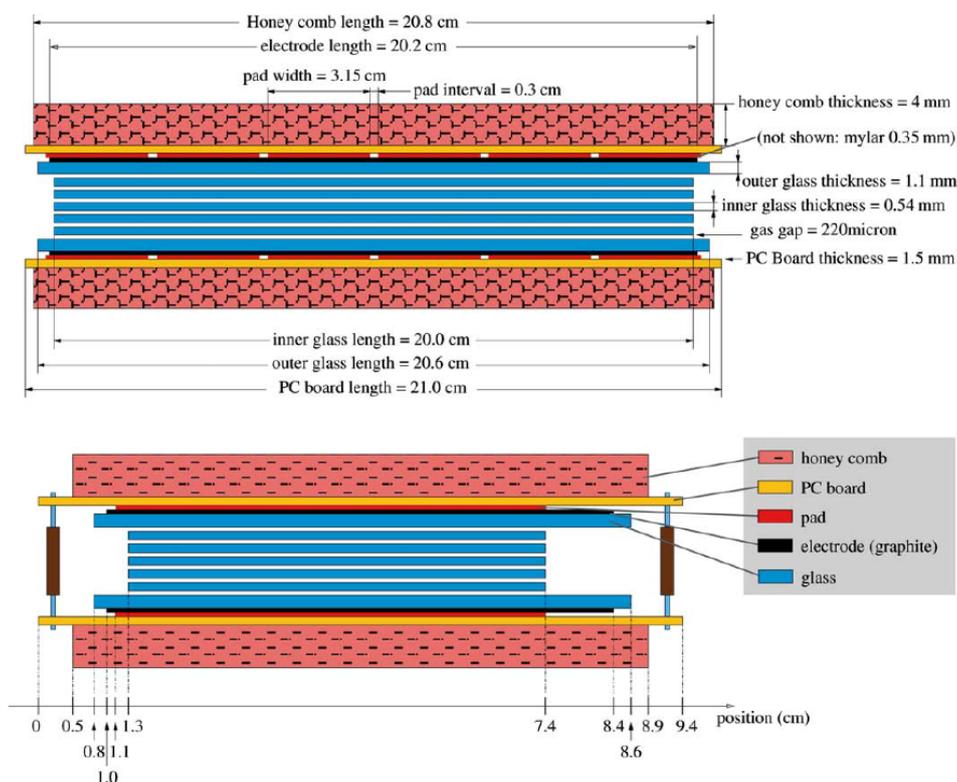


图 2.6: MRPC 模块的结构示意图及参数 [38]。

MRPC 的结构示意图及参数如图2.6所示 [38]，最外层是蜂窝板，其作用是加固 MRPC；接着往内是一层印刷电路板 (PCB)，每块 PCB 板上有 6 个  $63 \times 315 \text{mm}$  的读出单元 (pad)，每个读出单元之间的间距为  $3 \text{mm}$  [51]，其作用是读出感应信号；接着往内是一层很薄的聚酯薄膜 (Mylar)，其作用是在印刷电路板和电极之间起绝缘作用；接着是碳做的电极，它粘在更内层的外玻璃上，其作用是提供匀强电场，工作时两个电极之间加上  $14 \text{ kV}$  的电压差，会在内部提供电场强度高达  $10^5 \text{ V/cm}$  的匀强点场；再往内是内外玻璃，玻璃的电阻率为  $10^{12} - 10^{13} \Omega/\text{cm}$ ，外玻璃尺寸是  $206 \times 78 \times 0.7 \text{mm}$ ，内玻璃尺寸是  $200 \times 61 \times 0.54 \text{mm}$ ，每块玻璃之间有  $0.22 \text{mm}$  的间隙，其间充满着电负性的工作气体氟里昂 (95%) 和异丁烷 (5%) [38, 50-52]。

MRPC 的工作原理是当有带电粒子在气隙中运动时，会使气体产生原初电离。由于气隙中存在很强的电场，在电场力的作用下初始电离的带电粒子会加速运动，速度很高时又会引起气体的电离从而再次产生大量的次级带电粒子，由此不断级联发生雪崩 [51]。玻璃电阻板的作用是使雪崩的发展限制在很小的范围内，减小了流光发生的几率，玻璃电阻板对雪崩产生的感应信号是透明的，在读出电极上的感应信号是各个子气隙中的雪崩之和 [52]。

32 个 MRPC 组成一个 TOF 长条，整个 TOF 由 120 个这样的长条组成 [38, 50]。

我们知道 TOF 是根据粒子的质量来对粒子进行鉴别，但是我们又不能直接探测粒子的质量，TOF 是通过测量粒子的动量与飞行速度来计算质量的。飞行速度要根据测量到的飞行时间和距离计算出来。TOF 上记录的是粒子飞行结束的时间  $t_{end}$ ，粒子飞行开始的时间  $t_{start}$  要利用顶点位置探测器 (VPD) 来测量。

这里只简单地介绍一下顶点位置探测器测量粒子飞行开始时间的原理。VPD 由两个相同的探测器组件组成，安装在 STAR 探测器东西两侧，它们关于 STAR 探测器中心对称，距离为  $5.7 \text{m}$ ，VPD 覆盖的赝快度区间为  $4.24 < |\eta| < 5.1$  [39]。发生碰撞后，从主碰撞顶点产生的  $\pi_0$  会衰变出数十到数百个光子，这些光子在非常靠近束流管的位置以光速飞行并打到 VPD 上 [39]。我们把发生碰撞的时间为  $T_{start}$ ，碰撞位置的  $z$  坐标为  $z_{vtx}$ ，到达东侧 VPD 探测器的时间记为  $T_{east}$ ，到达西侧 VPD 探测器的时间记为  $T_{west}$ 。现在来计算碰撞位置的  $z$  坐标为  $z_{vtx}$ ，探测器的中心标记为  $z$  轴的原点。



图 2.7: 利用 VPD 计算主碰撞顶点和碰撞开始时间的示意图。

图2.7是利用 VPD 计算主碰撞顶点和碰撞开始时间的示意图，图中  $O'$  点是东侧 VPD 所在位置， $VPD_{west}$  点是西侧 VPD 所在位置， $O$  点是探测器的中心，是实验选

取的原点位置, 假设碰撞点  $Z_{vtx}$  的  $z$  轴坐标为  $z_{vtx}$ ,  $z_{vtx}$  的值为  $Z_{vtx}$  点坐标与原点坐标之差。为了求出  $z_{vtx}$ , 我们重新选取另一个坐标系  $O'$ , 主碰撞顶点在  $O'$  系中的值为  $z'_{vtx}$ , 通过坐标变换在  $O$  系中的坐标  $z_{vtx} = z'_{vtx} - L$ , 其中  $L$  是任意一侧 VPD 探测器到中心  $O$  的距离, 而在  $O'$  系中  $z'_{vtx}$  的坐标为  $c(T_{east} - T_{start})$ , 因此  $z_{vtx}$  可以计算如公式2.2。

$$\begin{aligned} z_{vtx} &= z'_{vtx} - L \\ &= c(T_{east} - T_{start}) - \frac{c(T_{east} - T_{start}) + c(T_{west} - T_{start})}{2} \\ &= \frac{c(T_{east} - T_{west})}{2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

可以对利用 VPD 测出来的主碰撞顶点位置的  $z$  坐标与 TPC 测出来的主碰撞顶点位置的  $z$  坐标之差施加筛选条件来去除堆积事例。

同样我们也可以利用 VPD 来测量碰撞开始的时间, 我们知道从主碰撞顶点分别到达两侧探测器的粒子所走过的总路程是  $2L$  (注意这里  $L$  是探测器中心到一侧 VPD 探测器的距离), 即

$$c(T_{east} - T_{start}) + c(T_{west} - T_{start}) = 2L \quad (2.3)$$

从公式2.3可以反解出  $T_{start}$ ,

$$T_{start} = \frac{(T_{east} + T_{west})}{2} - \frac{L}{c} \quad (2.4)$$

由 VPD 知道碰撞开始的时间  $T_{start}$  后, TOF 系统给出粒子飞行结束的时间  $T_{end}$ , 我们就可以知道粒子的飞行时间  $\Delta t = T_{end} - T_{start}$ 。将 TPC 中的径迹与 TOF 的击中点进行配对, 可以得到粒子从主碰撞顶点经 TPC 到 TOF 路径长度  $s$ 。利用公式2.5可以算出  $\beta$ , 式中  $c$  是指真空中的光速。

$$\frac{1}{\beta} = \frac{c\Delta t}{s} \quad (2.5)$$

同时 TPC 还能给出粒子的动量  $p$ , 由质量和  $\beta$  之间的关系2.6式可以算出质量。

$$m^2 = p^2 \left( \left( \frac{1}{\beta} \right)^2 - 1 \right) \quad (2.6)$$

质量是粒子的内禀属性, 用测到的粒子的质量当然可以用来区分粒子的种类, 它可以和 TPC 一起更好地鉴别粒子, 尤其是在动量较高时,  $\pi$  介子、 $K$  介子和质子的 Beth-Bloch 曲线很接近, 由于 TPC 不能很好地鉴别粒子, 因此这时更需要和 TOF 一起来鉴别粒子种类。

### 第三章 随机变量分布函数的数值特征

在统计学中，我们如果知道了一个随机变量的概率密度函数 (pdf) 就知道了一切关于这个随机变量的分布情况。同时为了更直观的描述这个分布的特点我们会去研究分布的各阶矩、各阶中心矩以及各阶累积量等，它们可以用来刻画随机变量概率密度函数的数值特征。常用到的分布函数的数值特征有均值 (M)、方差 ( $\sigma^2$ ) 以及偏度 (S) 和峰度 ( $\kappa$ ) 等 [53]。

#### 3.1 矩和中心矩

在数理统计中，一个连续型随机变量  $X$  的性质可以由一个概率密度函数  $f(x)$  来表征。这个概率密度函数的所有特征属性都可以用随机变量  $X$  的函数的期望值  $E[g(X)]$  来表示， $E[g(X)]$  的定义如下：

$$E[g(X)] = \int g(x)f(x)dx \quad (3.1)$$

其中  $g(x)$  表示随机变量  $X$  的任意函数，这里的积分是对所有  $X$  可能的取值范围，只要该函数在这个范围内是可积的。

若  $X$  是离散型随机变量，设  $X$  所有可能的取值为  $x_i(i=1,2,\dots)$ ，若  $X$  取各个可能值的概率为：

$$P\{X = x_i\} = p_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

则称为3.2式为离散型随机变量的分布律，本文中我们称其为概率分布函数，它也叫概率质量函数，表示随机变量取某个值的概率，注意这里和通常所说的随机变量的分布函数，即  $F(x)=P(X \leq x)$  (有时也把它叫做累积分布函数) 不是一个概念。若  $X$  为离散型随机变量只需将3.1式中的积分变为求和，即将3.1式变为如下3.3式，

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i)p_i \quad (3.3)$$

所以这里的讨论虽然以连续型随机变量为例，但是对离散型随机变量同样适用，只需稍微做出相应的改变。

随机变量  $X$  的  $n$  阶矩定义为：

$$\mu_n = E[X^n] = \int x^n f(x)dx \quad (3.4)$$

一阶矩通常被称为均值，用  $\mu_1$  或仅用  $\mu$  或用  $M$  表示。

随机变量  $X$  的  $n$  阶中心矩定义为:

$$\nu_n = E[(X - \mu)^n] = \int (x - \mu)^n f(x) dx \quad (3.5)$$

这里的“中心”一词是指随机变量  $X$  的函数  $g(x)$  是  $x$  与其中心值  $\mu$  的差。

这里我们计算随机变量  $X$  的前四阶中心矩和矩之间的关系。首先来看一阶中心矩  $\nu_1$ ,

$$\begin{aligned} \nu_1 &= E[(X - \mu)^1] \\ &= \int (x - \mu)^1 f(x) dx \\ &= \int x f(x) dx - \mu \int f(x) dx \\ &= \mu - \mu \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

我们可以从方程3.6看出, 对任意随机变量, 不论其服从什么样的分布规律, 一阶中心矩都等于零。

对于二阶中心矩  $\nu_2$ , 它就是我们熟知的方差  $\sigma^2$ 。其表示如下:

$$\begin{aligned} \nu_2 &= E[(X - \mu)^2] \\ &= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \\ &= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 \\ &= \mu_2 - \mu^2 \\ &= \sigma^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

类似地, 三阶和四阶中心矩与矩之间的关系表达出如下,

$$\begin{aligned} \nu_3 &= E[(X - \mu)^3] \\ &= E[X^3 - 3\mu X^2 + 3\mu^2 X - \mu^3] \\ &= \mu_3 - 3\mu\mu_2 + 2\mu^3 \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \nu_4 &= E[(X - \mu)^4] \\ &= E[X^4 - 4\mu X^3 + 6\mu^2 X^2 - 4\mu^3 X + \mu^4] \\ &= \mu_4 - 4\mu\mu_3 + 6\mu^2\mu_2 - 3\mu^4 \end{aligned} \quad (3.9)$$

利用牛顿二项式定理, 可以给出  $n$  阶中心矩的与  $n$  阶矩之间的一般关系式,

$$\begin{aligned} \nu_n &= E \left[ \begin{aligned} &C_n^0 X^n + C_n^1 X^{n-1}(-\mu) + C_n^2 X^{n-2}(-\mu)^2 + \dots \\ &+ C_n^r X^{n-r}(-\mu)^r + \dots + C_n^{n-1} X^1(-\mu)^{n-1} + C_n^n (-\mu)^n \end{aligned} \right] \\ &= \mu_n + C_n^1 \mu_{n-1}(-\mu) + C_n^2 \mu_{n-2}(-\mu)^2 + \dots \\ &\quad + C_n^r \mu_{n-r}(-\mu)^r + \dots + C_n^{n-1} \mu(-\mu)^{n-1} + (-\mu)^n \end{aligned} \quad (3.10)$$

这些中心矩在理解概率密度函数的形状时发挥着重要作用。

接下来我们介绍简单一下偏度和峰度。偏度的定义为，

$$S = \frac{\nu_3}{\nu_2^{3/2}} = \frac{\nu_3}{\sigma^3} \quad (3.11)$$

偏度是衡量随机变量分布歪斜的方向和程度的量，它代表概率密度函数曲线相对于平均值的不对称程度的数值特征。直观地说，它是概率密度函数曲线尾部的相对长度。

对于正态分布（也叫高斯分布），它的偏度为 0，代表正态分布是关于均值对称的，既不往左偏也不往右偏，正态分布的偏度的计算过程写在了公式3.12，

$$\begin{aligned} \nu_3 &= E[(X - \mu)^3] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} (x - \mu)^3 dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2} t^3 dt \leftarrow \text{被积函数为奇函数} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$S = \frac{\nu_3}{\nu_2^{3/2}} = \frac{\nu_3}{\sigma^3} = 0$$

偏度值的正负定性地描述随机变量 X 的分布是朝向平均值的左侧还是右侧歪斜。如图3.1所示， $S < 0$  表示分布具有负偏度，也称为左偏度。此时，平均值左侧的数据

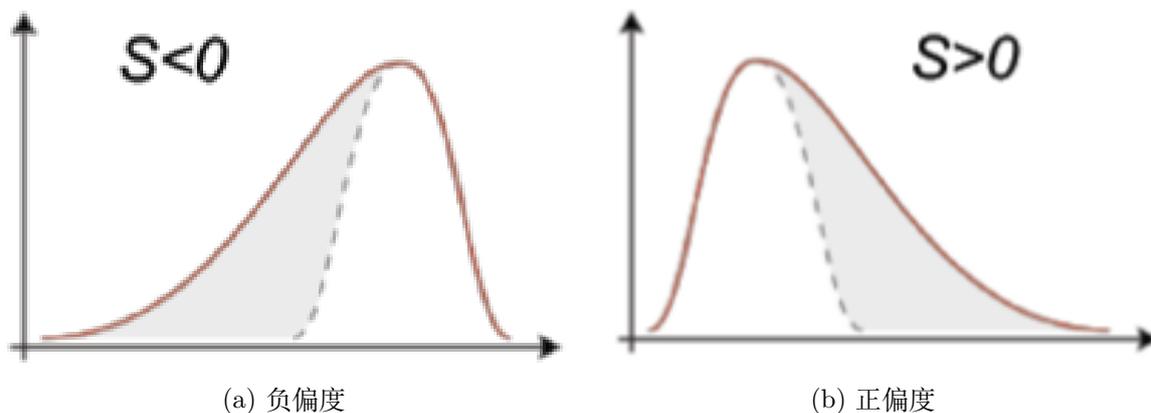


图 3.1: 偏度为正值和负值时随机变量概率密度函数曲线, 本图片来自百度百科。

少于右侧的数据。如图3.1a所示。直观地看来，左侧的尾部比右侧的尾部长，因为有少数变量的值较小，这使得曲线左侧的尾部拖得很长。 $S > 0$  表示分布具有正偏度，也称为右偏度，此时，平均值右侧的数据少于左侧的数据。如图3.1b所示，直观地显示，右侧的尾部比左侧的尾部长，因为少数变量的值较大，这使得曲线右侧的尾部拖得很长；当  $S$  接近 0 时，可以认为分布是对称的。更一般地，偏度表示分布的不对称性。

类似地，峰度  $\kappa$  与随机变量的四阶和二阶中心矩有关，它的定义如3.13式所示，

$$\kappa = \frac{\nu_4}{\sigma^4} - 3 \quad (3.13)$$

峰度代表概率密度函数曲线的峰值在平均值处的特征。图3.2是不同峰度值的概率密度函数曲线，图中不同颜色代表不同峰度值。直观地看，峰度反映了峰部的尖度。正

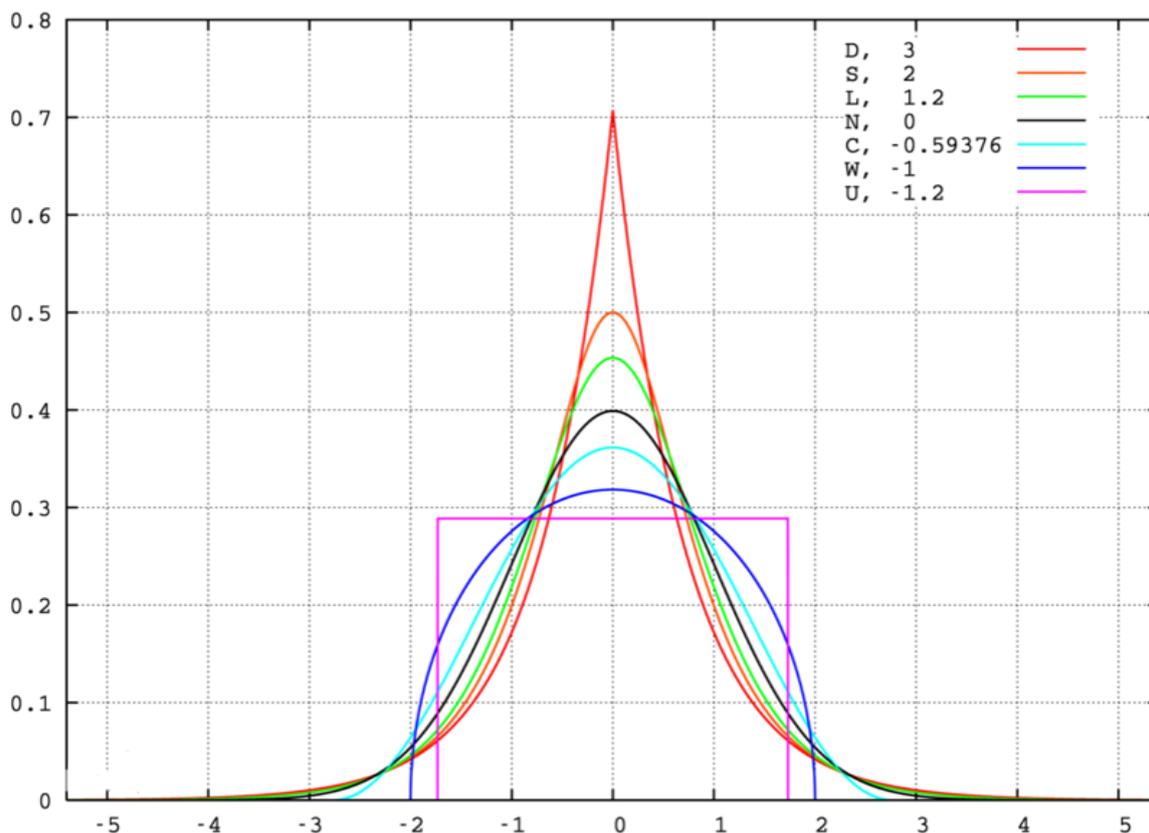


图 3.2: 不同峰度值的概率密度函数曲线，本图片来自百度百科。

态分布的峰度为 0。对于正态分布峰度的计算，利用高斯积分公式计算如公式3.14所示，

$$\begin{aligned} \nu_4 &= E[(X - \mu)^4] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} (x - \mu)^4 dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2} t^4 dt \\ &= 3\sigma^4 \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\kappa = \frac{\nu_4}{\sigma^4} - 3 = 0$$

与正态分布相比，如果随机变量概率分布的峰度大于 0，则峰值的形状比正态分布的形状更尖锐、更陡。如果峰度值小于 0，则峰的形状更钝的，并且比正态分布的峰更平滑。

类似地，可以构造更高阶矩，例如 5 阶、6 阶等，它们携带更多关于概率密度函数的信息。

### 3.2 矩生成函数

如果对于任意数列  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  以下面方式与函数  $G(t)$  相关联：

$$G(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots + a_n t^n \dots \quad (3.15)$$

那么我们把的  $G(t)$  称为数列的生成函数。

对于随机变量  $X$ ，矩生成函数 (mgf) 可以定义为 [54]，

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int e^{tx} f(x) dx \quad (3.16)$$

在公式3.16中展开  $e^{tx}$ ，

$$\begin{aligned} E[e^{tX}] &= E\left[1 + tX + \frac{t^2 X^2}{2!} + \dots\right] \\ &= 1 + E[X]t + E[X^2] \frac{t^2}{2!} + E[X^3] \frac{t^3}{3!} + \dots \end{aligned} \quad (3.17)$$

各阶矩可以通过矩生成函数有  $M_X(t)$  来构造，从式3.17可以看出，我们把矩生成函数对  $t$  求  $n$  阶导数，求导后， $t$  的幂次小于  $n$  的项为 0，然后我们再令  $t=0$ ， $t$  的幂次大于  $n$  的项也等于 0，于是就只留下  $t$  的幂次等于  $n$  的项，它刚好等于随机变量  $X$  的  $n$  阶矩，其可以写为：

$$\mu_n = E[X^n] = \left. \frac{d^n M_X(t)}{dt^n} \right|_{t=0} \quad (3.18)$$

中心矩也可以通过矩生成函数3.17来构造出来，我们把3.18式中的  $X$  变为  $Y=X-\mu$

$$\begin{aligned} \nu_n &= E[(X - \mu)^n] = E[Y^n] = \left. \frac{d^n M_Y(t)}{dt^n} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d^n E[e^{tY}]}{dt^n} \right|_{t=0} = \left. \left( \frac{d^n [E[e^{t(X-\mu)}]]}{dt^n} \right) \right|_{t=0} \\ &= \left. \left( \frac{d^n [e^{-\mu t} E[e^{tX}]]}{dt^n} \right) \right|_{t=0} = \left. \left( \frac{d^n [e^{-\mu t} M_X(t)]}{dt^n} \right) \right|_{t=0} \end{aligned} \quad (3.19)$$

### 3.3 累积量和阶乘累积量

上节我们介绍的矩和中心矩都是一组描述随机变量分布特点的常数集，但它们并不是唯一的，甚至不是最好的常数集。另一组常用的常数集是所谓的累积量，从理论角度讲它具有更有用的性质。

随机变量  $X$  的累积量  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$  可以由以下恒等式定义

$$\exp\left\{c_1 t + \frac{c_2 t^2}{2!} + \dots + \frac{c_n t^n}{n!} + \dots\right\} = 1 + \mu_1 t + \frac{\mu_2 t^2}{2!} + \dots + \frac{\mu_n t^n}{n!} + \dots = M_X(t) \quad (3.20)$$

其中  $\mu_n$  是方程3.18中出现的  $n$  阶矩。  $M_X(t)$  是方程3.16中的累积量生成函数。

对方程3.20两边同时取自然对数，我们可以得到方程

$$\ln M_X(t) = c_1 t + \frac{c_2 t^2}{2!} + \dots + \frac{c_n t^n}{n!} + \dots \equiv C(t) \quad (3.21)$$

将3.16式中的  $M_X(t)$  带入3.21式就可以得到

$$C(t) = \ln M_X(t) = \ln E[e^{tX}] \quad (3.22)$$

从方程 3.21 可以看出，要得到累积量  $c_n$ ，我们只需要计算  $C(t)$  的  $n$  阶导数，然后让  $t$  等于 0。因此我们把  $C(t)$  叫做累积量生成函数 (cumulant generating function, cgf)。

$$c_n = \left. \frac{d^n C(t)}{dt^n} \right|_{t=0} \quad (3.23)$$

我们可以在方程3.21两边同时对  $t$  求导，来计算累积量和矩之间的关系，

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{1}{M_X(t)} \frac{dM_X(t)}{dt} \Rightarrow M_X(t) \frac{dC(t)}{dt} = \frac{dM_X(t)}{dt} \quad (3.24)$$

把矩生成函数  $M_X(t)$  的表达式3.20和累积量生成函数  $C(t)$  的表达式3.21带入式3.24

$$\left(1 + \mu_1 t + \mu_2 \frac{t^2}{2!} + \dots\right) \left(c_1 + c_2 t + c_3 \frac{t^2}{2!} + \dots\right) = \left(\mu_1 + \mu_2 t + \mu_3 \frac{t^2}{2!} + \dots\right) \quad (3.25)$$

为了确保方程两边相等，需要等式两边  $t$  的同次幂的系数相等。因此可以得到不同阶累积量和矩之间的关系，

$$\mu_k = c_k + C_{k-1}^1 c_{k-1} \mu_1 + \dots + C_{k-1}^r c_{k-r} \mu_r + \dots + c_1 \mu_{k-1} \quad (3.26)$$

利用公式3.26我们把前四阶矩与累积量之间的关系列出来，

$$\begin{aligned} \mu_1 &= c_1 \\ \mu_2 &= c_2 + c_1 \mu_1 \\ \mu_3 &= c_3 + 2c_2 \mu_1 + c_1 \mu_2 \\ \mu_4 &= c_4 + 3c_3 \mu_1 + 3c_2 \mu_2 + c_1 \mu_3 \end{aligned} \quad (3.27)$$

使用关系式3.27，我们把累积量反解出来，下面是前四阶累积量与矩和中心矩之间的关系式，

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \mu_1 \\
 c_2 &= \mu_2 - \mu_1^2 = \nu_2 \\
 c_3 &= \mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3 = \nu_3 \\
 c_4 &= \mu_4 - 4\mu_3\mu_1 + 12\mu_2\mu_1^2 - 3\mu_2^2 - 6\mu_1^4 = \nu_4 - 3\nu_2^2
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

在第3.1节矩和中心矩中我们已经介绍了均值 (M)、方差 ( $\sigma^2$ )、偏度 (S) 和峰度 ( $\kappa$ )。从公式3.28可以看出，它们与累积量的关系如下：

$$M = c_1, \quad \sigma = c_2^{1/2}, \quad S = c_3/c_2^{3/2}, \quad \kappa = c_4/c_2^2 \tag{3.29}$$

由公式3.29可以利用 M、 $\sigma$ 、S 和  $\kappa$  来构造累积量的比值。

$$c_1/c_2 = M/\sigma^2, \quad c_3/c_2 = S\sigma, \quad c_4/c_2 = \kappa\sigma^2 \tag{3.30}$$

在本论文的分析中会计算前四阶累积量和这几个累积量的比值。

在分析中，会用到阶乘累积量 ( $\kappa_n$ ) 来进行效率修正，所以我在这里介绍阶乘累积量，其定义为 [55]，

$$\kappa_n = \left. \frac{\partial^n C_f(s)}{\partial s^n} \right|_{s=1} \tag{3.31}$$

在方程3.31中， $C_f(s)$  是阶乘累积量生成函数，表示如下

$$C_f(s) = \ln E[s^X] = \ln \langle s^X \rangle \tag{3.32}$$

这里  $\langle s^X \rangle$  表示  $s^X$  的期望值，即  $E[s^X]$ 。

累积量可以用阶乘累积量来表示，阶乘累积量也可以用累积量的来表示。为了得到这些关系，我们只要注意累积量生成函数3.22和阶乘累积量生成函数3.32通过变量代换  $s = e^t$  或  $t = \ln s$  相联系。利用这个关系，我们可以得到方程

$$C(t) = \ln M_X(t) = \ln \langle e^{tX} \rangle = \ln \langle s^X \rangle = C_f(s) \tag{3.33}$$

s 关于 t 的 n 阶导数在  $s=1$  处的值由下式给出，

$$\left. \frac{\partial^n s}{\partial t^n} \right|_{s=1} = 1 \tag{3.34}$$

同样，t 关于 s 的 n 阶导数在  $t=0$  处的值由下式给出，

$$\left. \frac{\partial^n t}{\partial s^n} \right|_{t=0} = (-1)^{n-1} (n-1)! \tag{3.35}$$

使用方程 3.23, 3.33 和 3.34, 我们可以用阶乘累积量来表示累积量, 这里列出前四阶累积量与阶乘累积量之间的关系。

$$c_1 = \left. \frac{\partial C(t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial C_f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} \right|_{s=1} = \kappa_1 \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \left. \frac{\partial^2 C(t)}{\partial t^2} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial C_f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} \right) \right|_{s=1} \\ &= \left. \frac{\partial C_f}{\partial s} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \right|_{s=1} + \left. \frac{\partial^2 C_f}{\partial s^2} \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right)^2 \right|_{s=1} \\ &= \kappa_1 + \kappa_2 \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} c_3 &= \left. \frac{\partial^3 C(t)}{\partial t^3} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial C_f}{\partial s} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \right) \right|_{s=1} + \left. \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 C_f}{\partial s^2} \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right)^2 \right) \right|_{s=1} \\ &= \left. \left( \frac{\partial^2 C_f}{\partial s^2} \right) \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \right) \right|_{s=1} + \left. \left( \frac{\partial C_f}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial^3 s}{\partial t^3} \right) \right|_{s=1} + \\ &\quad \left. \left( \frac{\partial^3 C_f}{\partial s^3} \right) \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right)^3 \right|_{s=1} + 2 \left. \left( \frac{\partial^2 C_f}{\partial s^2} \right) \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \right) \right|_{s=1} \\ &= 3 \left. \left( \frac{\partial^2 C_f}{\partial s^2} \right) \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \right) \right|_{s=1} + \\ &\quad \left. \left( \frac{\partial C_f}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial^3 s}{\partial t^3} \right) \right|_{s=1} + \left. \left( \frac{\partial^3 C_f}{\partial s^3} \right) \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right)^3 \right|_{s=1} \\ &= \kappa_3 + 3\kappa_2 + \kappa_1 \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned}
 c_4 &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^3 C(t)}{\partial^3 t} \right) \right|_{t=0} \\
 &= 3 \left. \frac{\partial^3 C_f}{\partial s^3} \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \right|_{s=1} + 3 \left. \frac{\partial^2 C_f}{\partial s^2} \left( \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \right)^2 \right|_{s=1} + 3 \left. \frac{\partial^2 C_f}{\partial s^2} \frac{\partial s}{\partial t} \frac{\partial^3 s}{\partial t^3} \right|_{s=1} + \\
 &\quad \left. \frac{\partial^2 C_f}{\partial s^2} \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right) \frac{\partial^3 s}{\partial t^3} \right|_{s=1} + \left. \frac{\partial C_f}{\partial s} \left( \frac{\partial^4 s}{\partial t^4} \right) \right|_{s=1} + \\
 &\quad \left. \frac{\partial^4 C_f}{\partial s^4} \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right)^4 \right|_{s=1} + 3 \left. \frac{\partial^3 C_f}{\partial s^3} \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \right|_{s=1} \\
 &= 3\kappa_3 + 3\kappa_2 + 3\kappa_2 + \kappa_2 + \kappa_1 + \kappa_4 + 3\kappa_3 \\
 &= \kappa_4 + 6\kappa_3 + 7\kappa_2 + \kappa_1
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

类似地，使用方程3.33,3.31 和 3.35，我们也可以把阶乘累积量用累积量表示出来。这里把前四阶列出来，

$$\kappa_1 = \left. \frac{\partial C_f(s)}{\partial s} \right|_{s=1} = \left. \frac{\partial C}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial s} \right|_{t=0} = c_1 \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
 \kappa_2 &= \left. \frac{\partial^2 C_f(s)}{\partial s^2} \right|_{s=1} = \left. \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial C}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial s} \right) \right|_{t=0} \\
 &= \left. \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} \left( \frac{\partial t}{\partial s} \right)^2 \right|_{t=0} + \left. \frac{\partial C}{\partial t} \frac{\partial^2 t}{\partial s^2} \right|_{t=0} \\
 &= c_2 - c_1
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
 \kappa_3 &= \left. \frac{\partial^3 C_f(s)}{\partial s^3} \right|_{s=1} = \left. \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^2 C_f}{\partial s^2} \right) \right|_{s=1} \\
 &= 2 \left. \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} \frac{\partial t}{\partial s} \frac{\partial^2 t}{\partial s^2} \right|_{t=0} + \left. \frac{\partial^3 C}{\partial t^3} \left( \frac{\partial t}{\partial s} \right)^3 \right|_{t=0} + \left. \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} \frac{\partial^2 t}{\partial s^2} \frac{\partial t}{\partial s} \right|_{t=0} + \left. \frac{\partial C}{\partial t} \frac{\partial^3 t}{\partial s^3} \right|_{t=0} \\
 &= 3 \left. \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} \frac{\partial t}{\partial s} \frac{\partial^2 t}{\partial s^2} \right|_{t=0} + \left. \frac{\partial^3 C}{\partial t^3} \left( \frac{\partial t}{\partial s} \right)^3 \right|_{t=0} + \left. \frac{\partial C}{\partial t} \frac{\partial^3 t}{\partial s^3} \right|_{t=0} \\
 &= c_3 - 3c_2 + 2c_1
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}
 \kappa_4 &= \left. \frac{\partial^4 C_f(s)}{\partial s^4} \right|_{s=1} = \left. \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^3 C_f}{\partial s^3} \right) \right|_{s=1} \\
 &= 3 \left. \frac{\partial^3 C}{\partial t^3} \left( \frac{\partial t}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^2 t}{\partial s^2} \right|_{t=0} + 3 \left. \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 t}{\partial s^2} \right)^2 \right|_{t=0} + 3 \left. \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} \frac{\partial t}{\partial s} \frac{\partial^3 t}{\partial s^3} \right|_{t=0} + \\
 &\left. \frac{\partial^4 C}{\partial t^4} \left( \frac{\partial t}{\partial s} \right)^4 \right|_{t=0} + 3 \left. \frac{\partial^3 C}{\partial t^3} \left( \frac{\partial t}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^2 t}{\partial s^2} \right|_{t=0} + \left. \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} \frac{\partial^3 t}{\partial s^3} \frac{\partial t}{\partial s} \right|_{t=0} + \left. \frac{\partial C}{\partial t} \frac{\partial^4 t}{\partial s^4} \right|_{t=0} \quad (3.43) \\
 &= -3c_3 + 3c_2 + 6c_2 + c_4 - 3c_3 + 2c_2 - 6c_1 \\
 &= c_4 - 6c_3 + 11c_2 - 6c_1
 \end{aligned}$$

当然，在已经知道如何用阶乘累积量来表示累积量（即方程3.36到 3.39）的情况下，更简单地处理方法是利用这几个方程反解出阶乘累积量，得到方程3.40 到3.43。

阶乘累积量与累积量的关系可以概括为如下紧致形式 [55]：

$$\kappa_n(X) = \langle X(X-1)(X-2)\dots(X-n+1) \rangle_c \quad (3.44)$$

在这个方程中  $\langle X^n \rangle_c$  表示 X 的 n 阶累积量，即  $c_n(X)$ 。

### 3.4 多变量情况下的累积量和阶乘累积量

接下来，讨论多变量情况下的累积量和阶乘累积量，考虑概率分布函数 [54-55]：

$$P(\vec{N}) = P(N_1, N_2, \dots, N_M) \quad (3.45)$$

M 是随机变量的个数， $N_1, N_2, \dots, N_M$  是 M 个整数随机变量，我们用  $N_i$  代替 X 来表示整数随机变量。考虑由这些随机变量的线性组合组成的一个新的随机变量  $Q_{(a)}$  [56]，

$$Q_{(a)} = \sum_{i=1}^M a_i N_i \quad (3.46)$$

在我们的分析中所计算的净守恒荷，就可以看做是各种粒子数的线性组合，由方程3.46给出， $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_M)$ 。例如，当我们考虑净重子数时，对于重子， $a_i = 1$ ，对于反重子， $a_i = -1$ ，对于其他守恒荷， $a_i = 0$ 。同样，我们也可以构造净电荷数和净奇异数。

这样做的一个优势在于可以选取多个粒子作为净重子数或者净奇异数的代表，例如我们选择净 (Lambda+Kaon) 作为净奇异数的代表，只需要将  $\Lambda$  粒子数、 $\bar{\Lambda}$  粒子数、 $K^+$  粒子数、 $K^-$  粒子数前面的系数  $a_i$  设置成相应的 1 或者-1，而其它粒子设置成 0，当想选择更多粒子作为代表时，只要对  $a_i$  做相应的设置就可以。

和单变量情况时定义累计量生成函数的式3.22类似，定义方程3.46中的随机变量的累积量生成函数为：

$$C(\vec{t}) = \ln \left[ \sum_{\vec{N}} e^{t_1 N_1 + t_2 N_2 + \dots + t_M N_M} P(\vec{N}) \right] = \ln \left\langle e^{\sum_{i=1}^M t_i N_i} \right\rangle \quad (3.47)$$

这里只是把式3.22中的  $tX$  换成式3.47中的  $\sum_{i=1}^M t_i N_i$ ，这是由于单变量变成多变量导致的。

由生成函数我们可以得到  $Q_{(a)}$  的  $n$  阶累积量，

$$c_n(Q_{(a)}) = \partial_{(a)}^n C(\vec{t}) \Big|_{\vec{t}=0} \quad (3.48)$$

其中

$$\partial_{(a)} = \sum_{i=1}^M a_i \frac{\partial}{\partial t_i} \quad (3.49)$$

$Q_{(a)}$  的一阶累积量可以把累积量生成函数3.47式带入3.48式计算如下：

$$\begin{aligned} c_1(Q_{(a)}) &= \partial_{(a)} C(\vec{t}) \Big|_{\vec{t}=0} = \sum_{i=1}^M a_i \frac{\partial \ln \left\langle e^{\sum_{j=1}^M t_j N_j} \right\rangle}{\partial t_i} \Big|_{\vec{t}=0} \\ &= \sum_{i=1}^M a_i \frac{\left\langle e^{\sum_{l=1}^M t_l N_l} \sum_j \delta_{i,j} N_j \right\rangle}{\left\langle e^{\sum_{k=1}^M t_k N_k} \right\rangle} \Big|_{\vec{t}=0} = \sum_{i=1}^M a_i \frac{\left\langle e^{\sum_{l=1}^M t_l N_l} N_i \right\rangle}{\left\langle e^{\sum_{k=1}^M t_k N_k} \right\rangle} \Big|_{\vec{t}=0} \\ &= \sum_{i=1}^M a_i \langle N_i \rangle \end{aligned} \quad (3.50)$$

类似地,  $Q_{(a)}$  的二阶累积量可以根据累积量生成函数计算如下:

$$\begin{aligned}
 c_2(Q_a) &= \partial_{(a)}^2 C(\vec{t}) \Big|_{\vec{t}=0} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_i a_j \frac{\partial}{\partial t_i} \frac{\partial}{\partial t_j} \ln \left\langle e^{\sum_k^M t_k N_k} \right\rangle \Big|_{\vec{t}=0} \\
 &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_i a_j \frac{\partial}{\partial t_i} \frac{\left\langle e^{\sum_k^M t_k N_k} N_j \right\rangle}{\left\langle e^{\sum_l^M t_l N_l} \right\rangle} \Big|_{\vec{t}=0} \\
 &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_i a_j \frac{\left\langle e^{\sum_k^M t_k N_k} N_i N_j \right\rangle \left\langle e^{\sum_m^M t_m N_m} \right\rangle - \left\langle e^{\sum_n^M t_n N_n} N_i \right\rangle \left\langle e^{\sum_k^M t_k N_k} N_j \right\rangle}{\left\langle e^{\sum_l^M t_l N_l} \right\rangle^2} \Big|_{\vec{t}=0} \\
 &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_i a_j \langle N_i N_j \rangle - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_i a_j \langle N_i \rangle \langle N_j \rangle
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

通过之前的讨论可以知道, 对于多变量的情况我们利用公式3.46构造了一个新的随机变量  $Q_{(a)}$ , 并构造了随机变量的生成函数3.47, 那么由生成函数利用公式3.48计算出来的  $Q_{(a)}$  的累积量和将  $Q_{(a)}$  视为单个随机变量时使用方程3.23计算出来的  $Q_{(a)}$  的累积量是不是一致的呢, 这里对前两阶做个简单的计算, 给出一个简明的比较。

利用单变量情况下由生成函数3.23得到的累积量与矩之间的关系3.28可以计算将  $Q_{(a)}$  视为单个随机变量时, 一阶累积量

$$c_1(Q_{(a)}) = \mu_1(Q_{(a)}) = \left\langle \sum_{i=1}^M a_i N_i \right\rangle = \sum_{i=1}^M a_i \langle N_i \rangle \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}
 c_2(Q_{(a)}) &= \mu_2 - \mu_1^2 = \langle (Q_{(a)})^2 \rangle - \langle Q_{(a)} \rangle^2 \\
 &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_i a_j \langle N_i N_j \rangle - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_i a_j \langle N_i \rangle \langle N_j \rangle
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

把公式3.50、公式3.51与公式3.52、公式3.53对比可以看出对于一阶和二阶累积量, 将  $Q_{(a)}$  视为多个随机变量的线性组合而计算出来的累积量与将  $Q_{(a)}$  视为单个随机变量

时计算出来的累积量是一致的。还可以计算三阶及更高阶累积量，这两种情况下它们是一致的。

虽然本论文只计算了累积量，但在做效率修正的过程中用到了混合累积量，这里做一个简单的介绍，二阶混合累积量定义为：

$$c(Q_{(a)}Q_{(b)}) = \partial_{(a)}\partial_{(b)}C(\vec{t})\Big|_{\vec{t}=0} \quad (3.54)$$

二阶混合累积量计算如下，

$$\begin{aligned} c(Q_{(a)}Q_{(b)}) &= \partial_{(a)}\partial_{(b)}C(\vec{t})\Big|_{\vec{t}=0} \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_i b_j \frac{\partial}{\partial t_i} \frac{\partial}{\partial t_j} \ln \left\langle e^{\sum_i^M t_i N_i} \right\rangle \Big|_{\vec{t}=0} \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_i b_j \frac{\partial}{\partial t_i} \frac{\left\langle e^{\sum_k^M t_k N_k} N_j \right\rangle}{\left\langle e^{\sum_l^M t_l N_l} \right\rangle} \Big|_{\vec{t}=0} \quad (3.55) \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_i b_j \frac{\left\langle e^{\sum_k^M t_k N_k} N_i N_j \right\rangle \left\langle e^{\sum_m^M t_m N_m} \right\rangle - \left\langle e^{\sum_n^M t_n N_n} N_i \right\rangle \left\langle e^{\sum_k^M t_k N_k} N_j \right\rangle}{\left\langle e^{\sum_l^M t_l N_l} \right\rangle^2} \Big|_{\vec{t}=0} \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_i b_j \langle N_i N_j \rangle - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_i b_j \langle N_i \rangle \langle N_j \rangle \end{aligned}$$

比较二阶累积量3.51式和二阶混合累积量3.55式可以发现，只要把3.55式中的  $Q_{(b)}$  换成  $Q_{(a)}$ ，就可以把二阶混合累积量  $c(Q_{(a)}Q_{(b)})$  变成二阶累积量  $c(Q_{(a)}^2)$ ，注意这里  $c(Q_{(a)}^2)$  表示的是  $Q_{(a)}$  的二阶累积量即  $c_2(Q_{(a)})$  而不是  $Q_{(a)}^2$  的一阶累积量，这里一阶累积量我们用  $c_1$  表示，同样  $c(Q_{(a)}Q_{(b)})$  是二阶混合累积量，而不是  $Q_{(a)}Q_{(b)}$  的一阶累积量。

同样地，三阶混合累积量可以由累积量生成函数给出，

$$c(Q_{(a)}Q_{(b)}Q_{(c)}) = \partial_{(a)}\partial_{(b)}\partial_{(c)}C(\vec{t})\Big|_{\vec{t}=0} \quad (3.56)$$

$Q_{(a)}$  的阶乘累积量生成函数定义为 [55, 57]:

$$C_f(\vec{s}) = \ln \left[ \sum_{\vec{N}} P(\vec{N}) \prod_{i=1}^M s_i^{N_i} \right] = \ln \left\langle \prod_{i=1}^M s_i^{N_i} \right\rangle \quad (3.57)$$

因此, 我们可以由  $Q_{(a)}$  的阶乘累积量生成函数得到  $m$  阶阶乘累积量,

$$\kappa_m(Q_{(a)}) = \bar{\partial}_{(a)}^m C_f(\vec{s}) \Big|_{\vec{s}=1} \quad (3.58)$$

公式3.58中出现的  $\bar{\partial}_{(a)}$  被定义为如下3.59式,

$$\bar{\partial}_{(a)} = \sum_{i=1}^M a_i \frac{\partial}{\partial s_i} \quad (3.59)$$

$Q_{(a)}$  的一阶阶乘累积量可以根据累积量生成函数计算如下,

$$\begin{aligned} \kappa_1(Q_{(a)}) &= \bar{\partial}_{(a)} C_f(\vec{s}) \Big|_{\vec{s}=1} = \sum_{k=1}^M a_k \frac{\partial \ln \left\langle \prod_{i=1}^M s_i^{N_i} \right\rangle}{\partial s_k} \Big|_{\vec{s}=1} \\ &= \sum_{k=1}^M a_k \frac{\left\langle \prod_{j=1, j \neq k}^M N_j s_k^{N_k-1} s_j^{N_j} \right\rangle}{\left\langle \prod_{i=1}^M s_i^{N_i} \right\rangle} \Big|_{\vec{s}=1} \\ &= \sum_{k=1}^M a_k \langle N_k \rangle \end{aligned} \quad (3.60)$$

把3.60式与3.60式对比可以看出  $Q_{(a)}$  的一阶阶乘累积量等于一阶累积量, 这与之前讨论过的单变量情况是一致的。

接下来计算一下  $Q_{(a)}$  的二阶阶乘累积量,

$$\begin{aligned}
 \kappa_2(Q_{(a)}) &= \bar{\partial}_{(a)} \bar{\partial}_{(a)} C_f(\vec{s}) \Big|_{\vec{s}=1} = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M a_k a_l \frac{\partial}{\partial s_l} \frac{\partial}{\partial s_k} \ln \left\langle \prod_{i=1}^M s_i^{N_i} \right\rangle \Big|_{\vec{s}=1} \\
 &= \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M a_k a_l \frac{\partial}{\partial s_l} \frac{\left\langle \prod_{j=1, j \neq k}^M N_k s_k^{N_k-1} s_j^{N_j} \right\rangle}{\left\langle \prod_{i=1}^M s_i^{N_i} \right\rangle} \Big|_{\vec{s}=1} \\
 &= \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M a_k a_l \left[ - \frac{\left\langle \prod_{j=1, j \neq l}^M N_l s_l^{N_l-1} s_j^{N_j} \right\rangle \left\langle \prod_{j=1, j \neq k}^M N_k s_k^{N_k-1} s_j^{N_j} \right\rangle}{\left\langle \prod_{i=1}^M s_i^{N_i} \right\rangle^2} \right] \Big|_{\vec{s}=1} \\
 &+ \sum_{k=1}^M \sum_{l=1, l \neq k}^M a_k a_l \left[ \frac{\left\langle \prod_{j=1, j \neq k, l}^M N_k s_k^{N_k-1} N_l s_l^{N_l-1} s_j^{N_j} \right\rangle}{\left\langle \prod_{i=1}^M s_i^{N_i} \right\rangle} \right] \Big|_{\vec{s}=1} \tag{3.61} \\
 &+ \sum_{k=1}^M a_k a_k \left[ \frac{\left\langle \prod_{j=1, j \neq k}^M N_k (N_k - 1) s_k^{N_k-2} s_j^{N_j} \right\rangle}{\left\langle \prod_{i=1}^M s_i^{N_i} \right\rangle} \right] \Big|_{\vec{s}=1} \\
 &= - \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M a_k a_l \langle N_k \rangle \langle N_l \rangle + \sum_{k=1}^M \sum_{l=1, l \neq k}^M a_k a_l \langle N_k N_l \rangle + \sum_{k=1}^M a_k^2 \langle N_k (N_k - 1) \rangle \\
 &= - \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M a_k a_l \langle N_k \rangle \langle N_l \rangle + \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M a_k a_l \langle N_k N_l \rangle - \sum_{k=1}^M a_k^2 \langle N_k \rangle
 \end{aligned}$$

把二阶阶乘累积量3.61的表达式与一阶累积量表达式3.50式以及二阶累积量表达式3.51式比较可以得到它们之间的关系:

$$\kappa_2(Q_{(a)}) = c_2(Q_{(a)}) - c_1(Q_{(a^2)}) \tag{3.62}$$

其中,

$$Q_{(a^2)} = \sum_{i=1}^M a_i^2 N_i \quad (3.63)$$

同样, 我们也可以计算混合阶乘累积量,

$$\begin{aligned} \kappa(Q_{(a)}Q_{(b)}) &= \bar{\partial}_{(a)}\bar{\partial}_{(b)}C_f(\vec{s})\Big|_{\vec{s}=1} = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M a_k b_l \frac{\partial}{\partial s_l} \frac{\partial}{\partial s_k} \ln \left\langle \prod_{i=1}^M s_i^{N_i} \right\rangle \Big|_{\vec{s}=1} \\ &= \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M a_k b_l \frac{\partial}{\partial s_l} \left[ \frac{\left\langle \prod_{j=1, j \neq k}^M N_k s_k^{N_k-1} s_j^{N_j} \right\rangle}{\left\langle \prod_{i=1}^M s_i^{N_i} \right\rangle} \right] \Big|_{\vec{s}=1} \\ &= \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M a_k b_l \left[ - \frac{\left[ \frac{\left\langle \prod_{j=1, j \neq l}^M N_l s_l^{N_l-1} s_j^{N_j} \right\rangle \left\langle \prod_{j=1, j \neq k}^M N_k s_k^{N_k-1} s_j^{N_j} \right\rangle}{\left\langle \prod_{i=1}^M s_i^{N_i} \right\rangle^2} \right]}{\left\langle \prod_{i=1}^M s_i^{N_i} \right\rangle} \right] \Big|_{\vec{s}=1} \\ &\quad + \sum_{k=1}^M \sum_{l=1, l \neq k}^M a_k b_l \left[ \frac{\left\langle \prod_{j=1, j \neq k, l}^M N_k s_k^{N_k-1} N_l s_l^{N_l-1} s_j^{N_j} \right\rangle}{\left\langle \prod_{i=1}^M s_i^{N_i} \right\rangle} \right] \Big|_{\vec{s}=1} \\ &\quad + \sum_{k=1}^M a_k b_k \left[ \frac{\left\langle \prod_{j=1, j \neq k}^M N_k (N_k - 1) s_k^{N_k-2} s_j^{N_j} \right\rangle}{\left\langle \prod_{i=1}^M s_i^{N_i} \right\rangle} \right] \Big|_{\vec{s}=1} \\ &= - \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M a_k b_l \langle N_k \rangle \langle N_l \rangle + \sum_{k=1}^M \sum_{l=1, l \neq k}^M a_k b_l \langle N_k N_l \rangle + \sum_{k=1}^M a_k b_k \langle N_k (N_k - 1) \rangle \\ &= - \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M a_k b_l \langle N_k \rangle \langle N_l \rangle + \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M a_k b_l \langle N_k N_l \rangle - \sum_{k=1}^M a_k b_k \langle N_k \rangle \end{aligned} \quad (3.64)$$

对于多变量情况下的累积量与阶乘累积量之间的关系, 通过之前前两阶的计算我们可以得到一阶累积量等于一阶阶乘累积量, 而二阶阶乘累积量与累积量之间的关系为公式3.62。

现在，我们从累积量与阶乘累积量的生成函数出发，推导累积量和阶乘累积量之间的关系。对于单变量的情况我们在3.3节 累积量和阶乘累积量中已经做了讨论，这里所用到的方法和之前类似，都是通过生成函数之间的关系来推导累积量之间的关系，即  $C(\vec{t})$  和  $C_f(\vec{s})$  可以通过变量替换  $s_i = e^{t_i}$  来相互连系，从多变量累积量生成函数3.47式出发，通过变量代换我们得到如下关系：

$$\begin{aligned}
 C(\vec{t}) &= \ln \left[ \sum_{\vec{N}} e^{t_1 N_1 + t_2 N_2 + \dots + t_M N_M} P(\vec{N}) \right] = \ln \left[ \sum_{\vec{N}} e^{\sum_{i=1}^M t_i N_i} P(\vec{N}) \right] \\
 &= \ln \left[ \sum_{\vec{N}} e^{\sum_{i=1}^M \ln s_i N_i} P(\vec{N}) \right] = \ln \left[ \sum_{\vec{N}} \prod_{i=1}^M e^{\ln s_i N_i} P(\vec{N}) \right] \\
 &= \ln \left[ \sum_{\vec{N}} \prod_{i=1}^M s_i^{N_i} P(\vec{N}) \right] = C_f(\vec{s})
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

因此，一阶累积量和阶乘累积量之间的关系计算如下，

$$\begin{aligned}
 c_1(Q_{(a)}) &= \partial_{(a)} C(\vec{t}) \Big|_{\vec{t}=0} = \sum_{i=1}^M a_i \frac{\partial C(\vec{t})}{\partial t_i} \Big|_{\vec{t}=0} \\
 &= \sum_{i=1}^M a_i \frac{\partial s_i}{\partial t_i} \frac{\partial C(\vec{t})}{\partial s_i} \Big|_{\vec{t}=0} = \sum_{i=1}^M a_i s_i \frac{\partial C_f(\vec{s})}{\partial s_i} \Big|_{\vec{s}=1} \\
 &= \sum_{i=1}^M a_i \frac{\partial C_f(\vec{s})}{\partial s_i} \Big|_{\vec{s}=1} \\
 &= \bar{\partial}_{(a)} C_f(\vec{s}) \Big|_{\vec{s}=1} = \kappa_1(Q_{(a)})
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

二阶混合累积量和阶乘累积量之间的关系计算如下，

$$\begin{aligned}
 c(Q_{(a)}Q_{(b)}) &= \partial_{(a)}\partial_{(b)}C(\vec{t})\Big|_{\vec{t}=0} = \left(\sum_{i=1}^M a_i \frac{\partial}{\partial t_i}\right) \left(\sum_{j=1}^M b_j \frac{\partial}{\partial t_j}\right) C(\vec{t})\Big|_{\vec{t}=0} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^M a_i \frac{\partial s_i}{\partial t_i} \frac{\partial}{\partial s_i}\right) \left(\sum_{j=1}^M b_j \frac{\partial s_j}{\partial t_j} \frac{\partial}{\partial s_j}\right) C(\vec{t})\Big|_{\vec{t}=0} \\
 &= \sum_{i,j=1}^M a_i b_j \left(s_i \frac{\partial}{\partial s_i}\right) \left(s_j \frac{\partial}{\partial s_j}\right) C(\vec{t})\Big|_{\vec{t}=0} \\
 &= \sum_{i,j=1}^M a_i b_j s_i s_j \frac{\partial}{\partial s_i} \frac{\partial}{\partial s_j} C(\vec{t})\Big|_{\vec{t}=0} + \sum_{i,j=1}^M a_i b_j \left(s_i \frac{\partial s_j}{\partial s_i}\right) \left(\frac{\partial}{\partial s_j}\right) C(\vec{t})\Big|_{\vec{t}=0} \quad (3.67) \\
 &= \sum_{i,j=1}^M a_i b_j s_i s_j \frac{\partial}{\partial s_i} \frac{\partial}{\partial s_j} C_f(\vec{s})\Big|_{\vec{s}=1} + \sum_{i,j=1}^M a_i b_j s_i \delta_{i,j} \frac{\partial}{\partial s_j} C_f(\vec{s})\Big|_{\vec{s}=1} \\
 &= \sum_{i,j=1}^M a_i b_j s_i s_j \frac{\partial}{\partial s_i} \frac{\partial}{\partial s_j} C_f(\vec{s})\Big|_{\vec{s}=1} + \sum_{i=1}^M a_i b_i s_i \frac{\partial}{\partial s_i} C_f(\vec{s})\Big|_{\vec{s}=1} \\
 &= \bar{\partial}_{(a)}\bar{\partial}_{(b)}C_f(\vec{s})\Big|_{\vec{s}=1} + \bar{\partial}_{(ab)}C_f(\vec{s})\Big|_{\vec{s}=1} \\
 &= \kappa(Q_{(a)}Q_{(b)}) + \kappa_1(Q_{(ab)})
 \end{aligned}$$

其中，

$$\bar{\partial}_{(ab)} = \sum_{i=1}^M a_i b_i \frac{\partial}{\partial s_i} \quad (3.68)$$

$$Q_{(ab)} = \sum_{i=1}^M a_i b_i N_i \quad (3.69)$$

令  $Q_{(a)} = Q_{(b)}$  公式3.67就得到二阶阶乘累积量与累积量之间的关系。

接下来让我们来讨论三阶混合累积量和阶乘累积量之间的关系，

$$\begin{aligned}
 c(Q_{(a)}Q_{(b)}Q_{(c)}) &= \partial_{(a)}\partial_{(b)}\partial_{(c)}C(\vec{t})\Big|_{\vec{t}=0} = \left(\sum_{i=1}^M a_i \frac{\partial}{\partial t_i}\right) \left(\sum_{j=1}^M b_j \frac{\partial}{\partial t_j}\right) \left(\sum_{k=1}^M c_k \frac{\partial}{\partial t_k}\right) C(\vec{t})\Big|_{\vec{t}=0} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^M a_i \frac{\partial s_i}{\partial t_i} \frac{\partial}{\partial s_i}\right) \left(\sum_{j=1}^M b_j \frac{\partial s_j}{\partial t_j} \frac{\partial}{\partial s_j}\right) \left(\sum_{k=1}^M c_k \frac{\partial s_k}{\partial t_k} \frac{\partial}{\partial s_k}\right) C(\vec{t})\Big|_{\vec{t}=0} \\
 &= \sum_{i,j,k=1}^M a_i b_j c_k \left(s_i \frac{\partial}{\partial s_i}\right) \left(s_j \frac{\partial}{\partial s_j}\right) \left(s_k \frac{\partial}{\partial s_k}\right) C(\vec{t})\Big|_{\vec{t}=0} \\
 &= \sum_{i,j,k=1}^M a_i b_j c_k s_i \frac{\partial}{\partial s_i} s_j \left(\delta_{j,k} \frac{\partial}{\partial s_k} + s_k \frac{\partial}{\partial s_j} \frac{\partial}{\partial s_k}\right) C(\vec{t})\Big|_{\vec{t}=0} \\
 &= \left(\sum_{i,j=1}^M a_i b_j c_j s_i \frac{\partial}{\partial s_i} s_j \frac{\partial}{\partial s_j} + \sum_{i,j,k=1}^M a_i b_j c_k s_i \frac{\partial}{\partial s_i} s_j s_k \frac{\partial}{\partial s_j} \frac{\partial}{\partial s_k}\right) C(\vec{t})\Big|_{\vec{t}=0} \\
 &= \left(\sum_{i,j=1}^M a_i b_j c_j s_i \delta_{i,j} \frac{\partial}{\partial s_j} + \sum_{i,j=1}^M a_i b_j c_j s_i s_j \frac{\partial}{\partial s_i} \frac{\partial}{\partial s_j} + \sum_{i,j,k=1}^M a_i b_j c_k s_i \delta_{i,j} s_k \frac{\partial}{\partial s_j} \frac{\partial}{\partial s_k} + \right. \\
 &\quad \left. \sum_{i,j,k=1}^M a_i b_j c_k s_i \delta_{i,k} s_j \frac{\partial}{\partial s_j} \frac{\partial}{\partial s_k} + \sum_{i,j,k=1}^M a_i b_j c_k s_i s_j s_k \frac{\partial}{\partial s_i} \frac{\partial}{\partial s_j} \frac{\partial}{\partial s_k}\right) C(\vec{t})\Big|_{\vec{t}=0} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^M a_i b_i c_i s_i \frac{\partial}{\partial s_i} + \sum_{i,j=1}^M a_i b_j c_j s_i s_j \frac{\partial}{\partial s_i} \frac{\partial}{\partial s_j} + \sum_{i,k=1}^M a_i b_i c_k s_i s_k \frac{\partial}{\partial s_i} \frac{\partial}{\partial s_k} + \right. \\
 &\quad \left. \sum_{i,j=1}^M a_i b_j c_i s_i s_j \frac{\partial}{\partial s_j} \frac{\partial}{\partial s_i} + \sum_{i,j,k=1}^M a_i b_j c_k s_i s_j s_k \frac{\partial}{\partial s_i} \frac{\partial}{\partial s_j} \frac{\partial}{\partial s_k}\right) C(\vec{t})\Big|_{\vec{t}=0} \\
 &= \bar{\partial}_{(abc)} C_f(\vec{s})\Big|_{\vec{s}=1} + \bar{\partial}_{(a)} \bar{\partial}_{(bc)} C_f(\vec{s})\Big|_{\vec{s}=1} \\
 &\quad + \bar{\partial}_{(ab)} \bar{\partial}_{(c)} C_f(\vec{s})\Big|_{\vec{s}=1} + \bar{\partial}_{(ac)} \bar{\partial}_{(b)} C_f(\vec{s})\Big|_{\vec{s}=1} + \bar{\partial}_{(a)} \bar{\partial}_{(b)} \bar{\partial}_{(c)} C_f(\vec{s})\Big|_{\vec{s}=1} \\
 &= \kappa_1(Q_{(abc)}) + \kappa(Q_{(a)}Q_{(bc)}) + \kappa(Q_{(ab)}Q_{(c)}) + \kappa(Q_{(ac)}Q_{(b)}) + \kappa(Q_{(a)}Q_{(b)}Q_{(c)})
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

可以用完全相同的方式计算四阶混合累积量和阶乘累积量之间的关系，其计算过程

比较冗长，只在这里给出结果 [55]，

$$\begin{aligned}
 c(Q_{(a)}Q_{(b)}Q_{(c)}Q_{(d)}) &= \kappa(Q_{(a)}Q_{(b)}Q_{(c)}Q_{(d)}) \\
 &+ \kappa(Q_{(a)}Q_{(b)}Q_{(cd)}) + \kappa(Q_{(a)}Q_{(d)}Q_{(bc)}) + \kappa(Q_{(a)}Q_{(c)}Q_{(bd)}) \\
 &+ \kappa(Q_{(b)}Q_{(c)}Q_{(ad)}) + \kappa(Q_{(b)}Q_{(d)}Q_{(ac)}) + \kappa(Q_{(c)}Q_{(d)}Q_{(ab)}) \\
 &+ \kappa(Q_{(a)}Q_{(bcd)}) + \kappa(Q_{(b)}Q_{(acd)}) + \kappa(Q_{(c)}Q_{(abd)}) + \kappa(Q_{(d)}Q_{(abc)}) \\
 &+ \kappa(Q_{(ab)}Q_{(cd)}) + \kappa(Q_{(ac)}Q_{(bd)}) + \kappa(Q_{(ad)}Q_{(bc)}) + \kappa_1(Q_{(abcd)})
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

可以使用同样的方法，把阶乘累积量用累积量表示出来；或者已经知道了前四阶累积量和阶乘累积量之间的关系式3.66-3.71，我们可以反解出用累积量表示的阶乘累积量。我在这里列出了前四阶用累积量表示的阶乘累积量，在做效率修正时会使用到它们 [55]。

$$\kappa_1(Q_{(a)}) = c_1(Q_{(a)}) \tag{3.72}$$

$$\kappa(Q_{(a)}Q_{(b)}) = c(Q_{(a)}Q_{(b)}) - c_1(Q_{(ab)}) \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned}
 \kappa(Q_{(a)}Q_{(b)}Q_{(c)}) &= c(Q_{(a)}Q_{(b)}Q_{(c)}) - c(Q_{(a)}Q_{(bc)}) - c(Q_{(b)}Q_{(ac)}) \\
 &- C(Q_{(c)}Q_{(ab)}) + 2C(Q_{(abc)})
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

$$\begin{aligned}
 \kappa(Q_{(a)}Q_{(b)}Q_{(c)}Q_{(d)}) &= c(Q_{(a)}Q_{(b)}Q_{(c)}Q_{(d)}) \\
 &- c(Q_{(a)}Q_{(b)}Q_{(cd)}) - c(Q_{(a)}Q_{(d)}Q_{(bc)}) - c(Q_{(a)}Q_{(c)}Q_{(bd)}) \\
 &- c(Q_{(b)}Q_{(c)}Q_{(ad)}) - c(Q_{(b)}Q_{(d)}Q_{(ac)}) - c(Q_{(c)}Q_{(d)}Q_{(ab)}) \\
 &+ 2c(Q_{(a)}Q_{(bcd)}) + 2c(Q_{(b)}Q_{(acd)}) + 2c(Q_{(c)}Q_{(abd)}) + 2c(Q_{(d)}Q_{(abc)}) \\
 &+ c(Q_{(ab)}Q_{(cd)}) + c(Q_{(ac)}Q_{(bd)}) + c(Q_{(ad)}Q_{(bc)}) - 6c_1(Q_{(abcd)})
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

当想计算  $Q_{(a)}$  的高阶阶乘累积量与累积量之间的关系时，只要令3.72式到3.75式中的 b、c、d 等都等于 a 即可。

## 第四章 实验数据分析

本章介绍实验数据的分析，我们分析的数据来自 STAR 合作组能量扫描工程二期 (BESII) 在 2018 年采集的质心系能量为  $\sqrt{s_{NN}}=27$  GeV 的金核 + 金核对心碰撞的数据。

### 4.1 事例挑选

由于 STAR 采集的金核 + 金核  $\sqrt{s_{NN}}=27$  GeV 碰撞事例的数据量达到十亿数量级，对每个事例数据的采集情况有好有坏，因此我们需要对采集到的数据进行筛选，去除那些数据采集出现问题的事例，从而挑选出数据采集没有问题的事例，即好的事例组成事例样本进行分析。

挑选好的事例的过程叫做 Event Quality Assurance(Event QA)，我们可以把它叫做事例质量检验，或者事例挑选。

RHIC 把束流注入、加速、保持运行的这段时间称为一个“fill”，其时间大约 10 个小时左右。之后由于碰撞时束流亮度降低以及准直等问题，会由值班的工作人员把这个 fill 去除掉，重新注入新的束流。由于在每个 fill 时间段内产生大量的数据，为了防止磁盘溢出同时为了避免采集数据时出现问题而导致整个 fill 的数据浪费掉，STAR 会在每个 fill 内分多段采集数据。STAR 以 run 为单位采集数据，每个 run 大约持续 30 分钟，每个 run 都有固定的编号，STAR 将其称为 runnumber。对于每个 run 都有日志文件记录每个 run 数据采集时出现的问题，我们可以查阅日志文件来判断这个 run 是否是有问题。同时我们会在每个 run 内计算一些物理量事例平均的平均值，如赝快度、横动量等，或者一些物理量的平均值，如带电粒子多重数、TofMatch 等。对于那些平均值明显偏离整体的 run，我们也把它们当做有问题的事例而剔除掉。每个 run 会有很多对粒子发生碰撞，每一对粒子发生碰撞就是我们这里所说的一个事例。当发现某个 run 有问题时就会把整个 run 的事例都剔除掉。

除此之外，对于本分析，我们还使用了以下的筛选条件来进行事例挑选。在沿着束流管方向即纵向上，主碰撞顶点位置要求选择距离 TPC 探测器中心小于 30 cm，即  $|V_z| < 30$  cm，这样可以确保探测器覆盖在理想的范围内，并且可以确保探测器的探测效率的一致性；在束流管横向上要求  $|V_r| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} < 2$  cm，这是为了剔除金原子核与束流管或其他材料相互作用时出现的伪事例。当亮度很高时，可能会导致事例堆积 (Pileup) 效应。事例堆积效应是说记录的一个事例中实际上包含了多于一个单一碰撞事例。这是由于 TPC 的响应比较慢，如果在短时间内发生多于一次碰撞，TPC 并不能区分它们而是把这些碰撞记录为一次碰撞。由于堆积事例包含了不止一

个碰撞，因此它的粒子多重数会明显高于真实的事例，这显然会对我们计算粒子多重数分布的累积量造成影响，因此在事例挑选中要去除 Pileup 事例。我们通过 TPC 测得的参考带电粒子多重数 (RefMult) 和打到 TOF 上带电粒子数量 (TofMatch) 之间的关系来剔除堆积事例。

我把本分析中所用的  $\sqrt{s_{NN}}=27$  GeV 金核 + 金核碰撞中用于事例挑选的判选条件列在了表4.1中。

表 4.1:  $\sqrt{s_{NN}}=27$  GeV 金核 + 金核碰撞中用于事例挑选的判选条件

Trigger setup name =	27GeV_production_2018
Production =	P19ib
Trigger Ids =	610001, 610011, 610021, 610031, 610041, 610051
$ V_z  <$	30 cm
$V_r <$	2 cm
Badrun removal	
Pileup events removal	

图4.1是带电粒子位置坐标第三分量  $V_z$  的分布，黑色的线是加判选条件 (cut) 之前，红色的线是加  $\text{cut}(|V_z| < 30 \text{ cm})$  之后。图4.2是加过  $V_r < 2 \text{ cm}$  cut 之后带电粒子位置坐标在 x-y 平面内的分布情况。

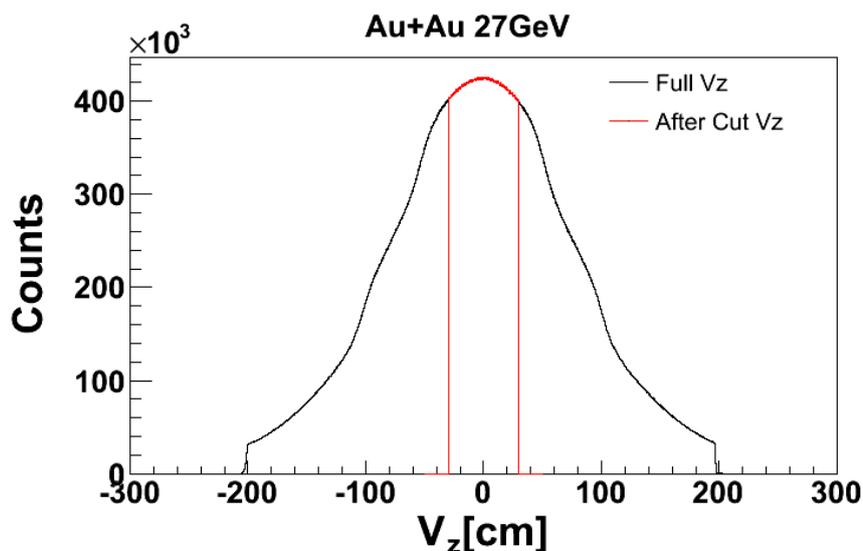


图 4.1: 带电粒子位置坐标第三分量  $V_z$  的分布，黑色的线是加判选条件 (cut) 之前，红色的线是加  $\text{cut}(|V_z| < 30 \text{ cm})$  之后。

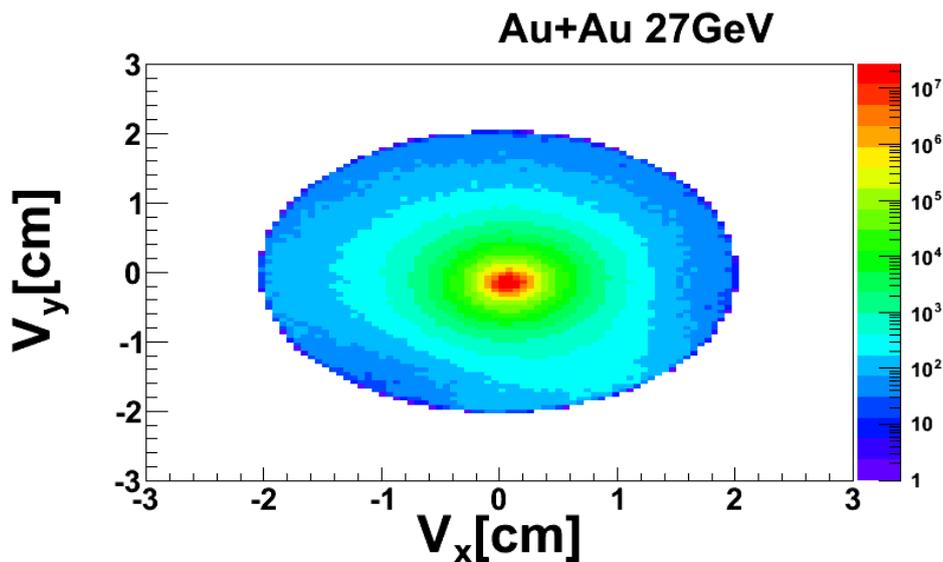


图 4.2: 加过  $V_r < 2$  cm cut 之后带电粒子位置坐标在 x-y 平面内的分布。

我们使用 RefMult 和 TofMatch 之间的关系来去除堆积事例，如图4.3所示，这两条红线是我们使用的筛选条件。

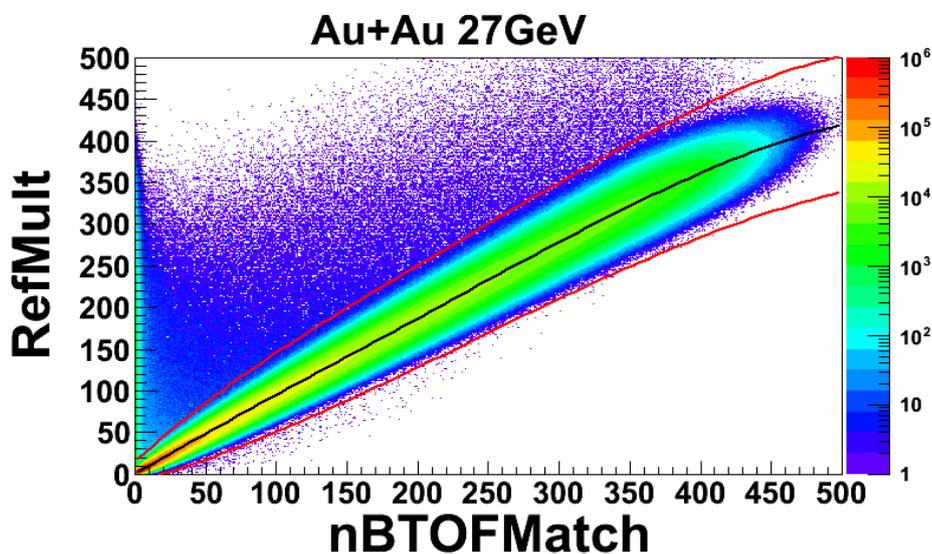


图 4.3: RefMult vs. TofMatch 分布用来去除堆积事例。

按照表4.1加上相应的判选条件之后,保留下来的事例就是我们选取的样本,图4.4是加了每个 cut 后有多少百分比的事例会保留下来。

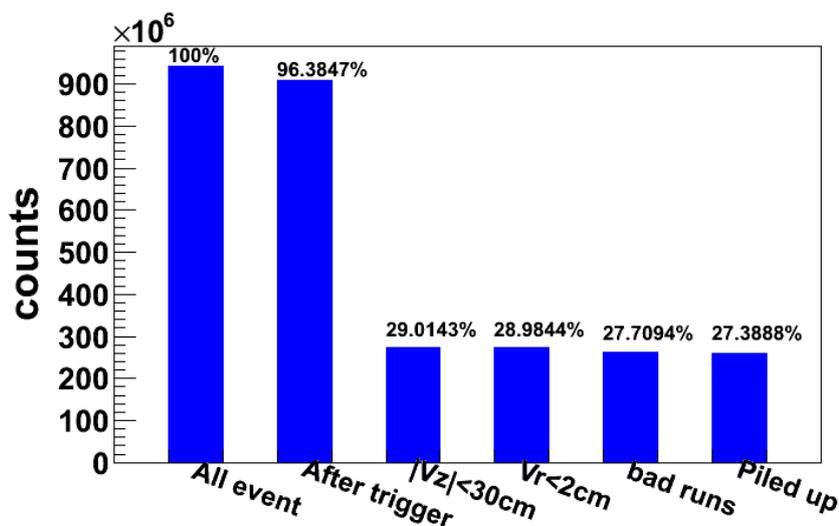


图 4.4: 加了每个 cut 后有多少百分比的事例会保存下来。

## 4.2 K 介子径迹挑选与鉴别

在本分析中我们测量了  $K^+$ 、 $K^-$ 、 $\Lambda$  和  $\bar{\Lambda}$  粒子的多重数分布情况，并计算净 ( $K^+$   $\Lambda$ ) 分布的前四阶累积量。K 介子 ( $K^+$  和  $K^-$ ) 用 TPC 和 TOF 来鉴别，同时我们在横动量区间为  $0.4 < p_T < 1.6$  GeV/c 范围内，快度区间为  $-0.5 < y < 0.5$  范围内挑选 K 介子。质子 ( $p^\pm$ ) 和  $\pi$  介子 ( $\pi^\pm$ ) 也被筛选出来用于重建  $\Lambda$  和  $\bar{\Lambda}$ 。首先我把分析中用到的 K 介子的径迹挑选和粒子鉴别条件列在表 4.2 中。

表 4.2: 分析中用到的 K 介子的径迹挑选和粒子鉴别条件

横动量 ( $p_T$ )	0.4 到 1.6 GeV/c
快度 ( $y$ )	-0.5 到 0.5
nFitPoints	> 15
DCA	< 1 cm
nFitpnts/nFitPoss	> 0.52
nhitsdedx	> 5
TPC	$ \text{n}\sigma_K  < 2$ and $ \text{n}\sigma_\pi  > 2$
TOF	$0.15 < m^2 < 0.4$ GeV <sup>2</sup> /c <sup>4</sup>
动量	$p < 2.0$ GeV/c

分析中所用到的所有的 K 介子径迹都是在快度为-0.5 到 0.5, 横动量为 0.4 到 1.6 GeV/c 的范围内, 在这个横向动量范围内, STAR 对 K 介子有很好的鉴别能力 [58]。对于每个事例发生碰撞的点我们称为主碰撞顶点 (Primary Vertex), 发生碰撞之后会产生许多粒子, 他们其中的好多粒子会发生衰变产生次级粒子, 为了减少次级带电粒子的污染, 我们会选择最接近主碰撞顶点的距离 (DCA) 小于 1cm 的径迹。在 TPC 探测器中, 一条径迹最多可以有 45 个击中点。在本文分析中, 我们挑选使用了最少 15 个击中点作为拟合点进行拟合从而重建出的径迹, 即  $nFitPoints > 15$ 。由于一条径迹最多可以有 45 个击中点, 而我们挑选的拟合点的下限为 15, 为了避免分裂径迹的重复记数, 我们增加了筛选条件, 径迹重建所用到的拟合点相对于该径迹所有可能的拟合点的占比要大于 52%, 即  $nFitpnts/nFitPoss > 0.52$ 。

图4.5和图4.6是径迹分布的信息, 这里展示了横动量  $P_t$  分布、快度  $y$  分布、 $nfit$  分布、 $nhits$  分布、 $nhitsdedx$  分布、 $nFitPoss$  分布、 $dca$  分布、 $RefMult2$  分布、 $RefMult$  分布、 $nBTOFMatch$  分布。

STAR 探测器能够实现在中等快度且  $2\pi$  方位角接收区间的覆盖, 并且在这个接收区间内具有出色的粒子鉴别能力。对于 K 介子的鉴别, 用到了时间投影室 (TPC) 的电离能损 ( $dE/dx$ ) 机制和结合飞行时间 (TOF) 探测器测得的粒子的质量。图4.7是金核 + 金核 27 GeV 碰撞能量下径迹的电离能损  $dE/dx$  关于动量乘以电荷的二维分布图, 之所以要乘以电荷是为了可以在图中明显地区分出正反粒子。从图中可以明显看出, 使用 TPC 进行粒子鉴别时, 在低动量区间每种粒子都可以观察到不同的粒子带, 此时我们可以利用 TPC 对粒子进行很好地鉴别。但当动量变大时, 不同的粒子带就混在了一起, 此时仅用 TPC 并不能对粒子进行很好地鉴别, 我们需要同时使用 TOF 探测器来进行粒子鉴别。

TOF 探测器系统主要用于在更宽的动量范围内加强带电粒子鉴别能力。使用 TOF 探测器是通过间接测量径迹的质量来完成的粒子鉴别的。TOF 系统给出飞行时间  $\Delta t$ , TPC 给出动量  $p$  和路径长度  $s$ 。由飞行时间  $\Delta t$  和动量  $p$ , 利用公式2.5可以算出  $\beta$ , 式中  $c$  是指真空中的光速。并由质量和  $\beta$  之间的关系2.6算出质量。

图4.7是金核 + 金核 27 GeV 碰撞能量下 TOF 质量平方关于电荷乘动量的二维分布图。

我们把 TPC 和 TOF 探测器结合起来使用, 能够将在横动量 0.4 至 1.6 GeV/c 范围内的 K 介子、 $\pi$  介子和质子进行良好的粒子鉴别。而在本分析中, 我们使用的横向动量接受范围就是  $0.4 < p_T < 1.6$  GeV/c。

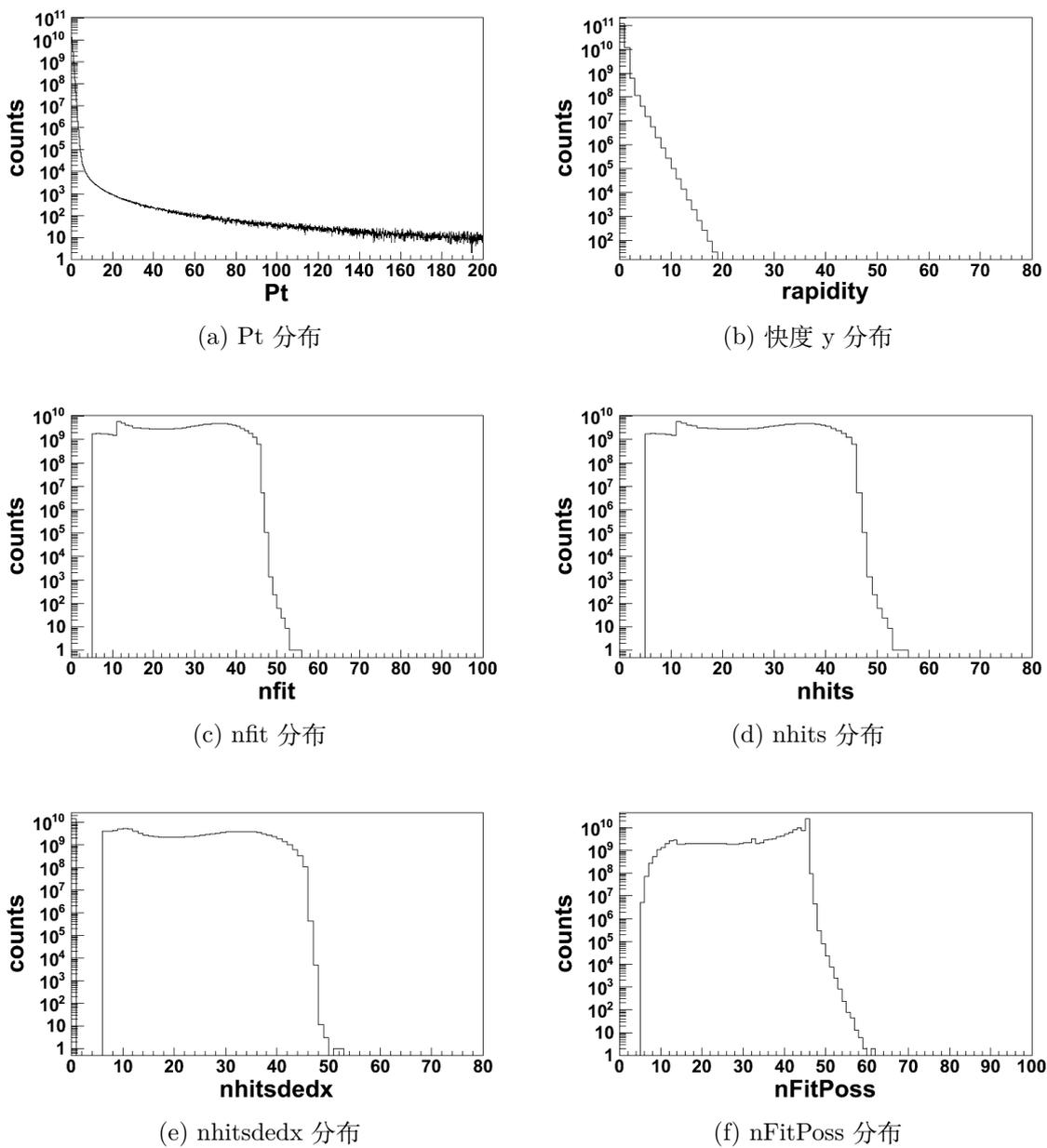


图 4.5: 金核 + 金核 27 GeV 碰撞能量下横动量  $P_t$  , 快度  $y$  , nfit , nhits , nhitsdedx 和 nFitPoss 的分布图。

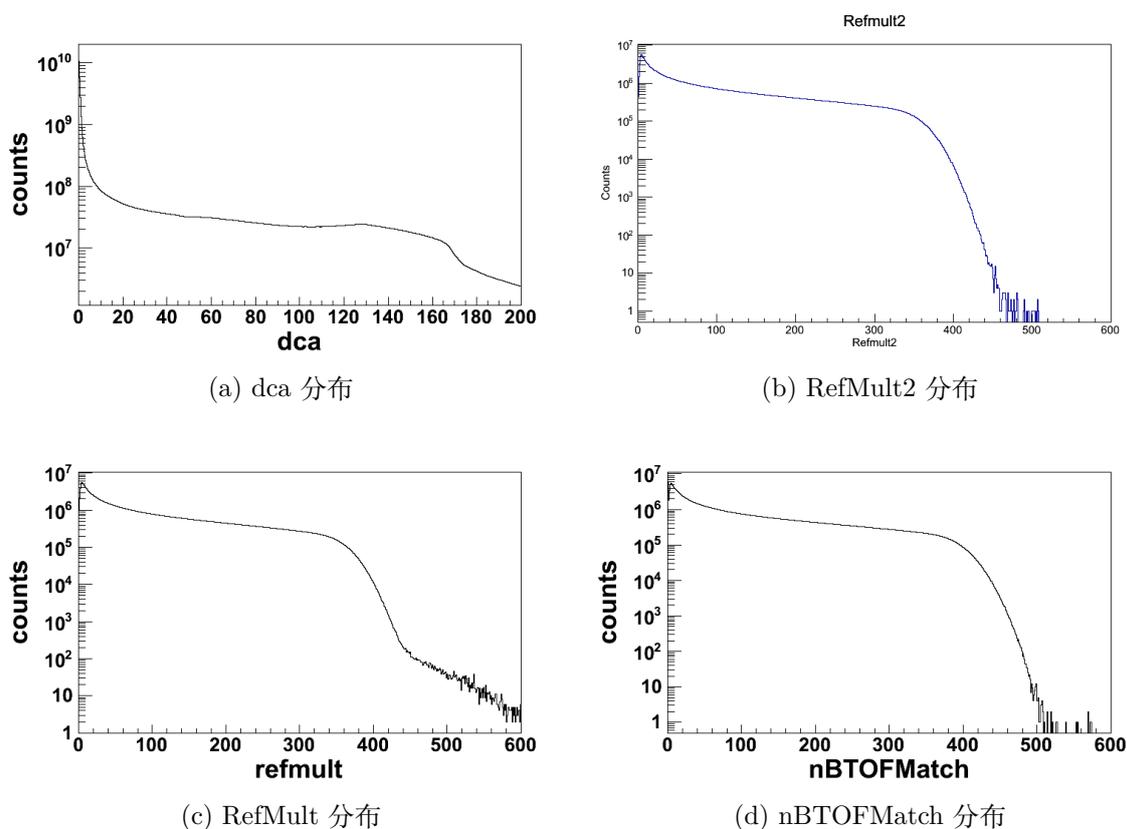


图 4.6: 金核 + 金核 27 GeV 碰撞能量下 dca , RefMult2 , RefMult , nBTOFMatch 分布图

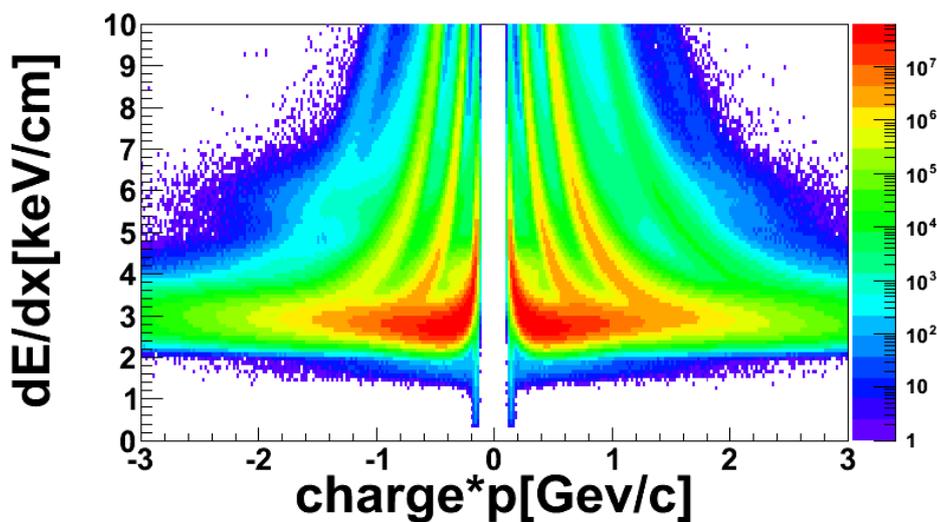


图 4.7: 金核 + 金核 27 GeV 碰撞能量下径迹的电离能损  $dE/dx$  关于动量乘以电荷的二维分布图。

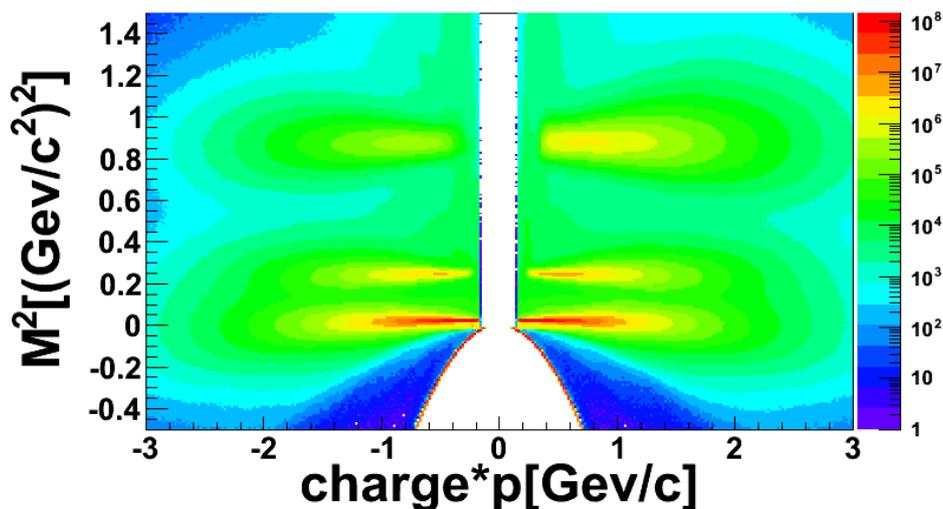


图 4.8: 金核 + 金核 27 GeV 碰撞能量下 TOF 质量平方关于电荷乘动量的分布。

### 4.3 $\Lambda$ 超子的重建

在本文中我们测量了  $K^+$ ,  $K^-$ ,  $\Lambda$  和  $\bar{\Lambda}$  的多重数分布, 以此来计算净-( $K+\Lambda$ ) 的累积量。

$\Lambda$  是由一个上夸克、一个下夸克和一个奇异夸克组成, 它属于重子。强子可以分为重子和介子, 重子由三个夸克或三个反夸克组成, 介子由一个夸克和一个反夸克组成。 $\Lambda$  也属于奇异粒子, 它的奇异之处在于它是由强相互作用产生, 而由弱相互作用衰变。 $\Lambda$  是一种电中性粒子。由于  $\Lambda$  不带电并在产生之后短时间内衰变, 因此 STAR 探测器无法直接探测到它, 而是通过其衰变产物重建出  $\Lambda$ 。它衰变为质子和  $\pi$  介子, 分支比为 63.9%[59]。



我们知道  $\Lambda$  超子包含 u、d、s 夸克, 但  $p^+$  包含 u、u、d 夸克,  $\pi^-$  含有 d、 $\bar{u}$  夸克。因此, 我们可以确定方程 4.1 属于弱相互作用, 因为只有弱相互作用才能允许净 s 夸克不守恒。

由式 4.1 可知, 我们首先要挑选出质子和  $\pi$  介子用于  $\Lambda$  和  $\bar{\Lambda}$  的重建。 $p^+$  和  $\pi^-$  用于重建  $\Lambda$ ,  $p^-$  和  $\pi^+$  用于重建  $\bar{\Lambda}$ 。

为了理解如何重建  $\Lambda$ , 我们首先介绍一下不变质量, 它也被称为内秉质量或固有质量。对于单个粒子, 这里的不变是指当从一个参考系变换到另一个参考系统时, 粒子的质量在洛伦兹变换下保持不变。也就是说, 单个粒子的质量在所有坐标系中都是恒定的。因此可以看出不变质量是粒子的内秉属性, 是某个粒子区别于其它粒子的一

个重要特征，与你在哪个参考系中观察无关，因此可以用它来作为粒子鉴别的特征物理量之一。因此我们就用衰变产物的质量和动量来计算衰变粒子的不变质量。众所周知，能量和动量组成一个洛伦兹四矢量  $p^\mu = (E, \vec{p})$ 。

$$p^2 = p^\mu p^\mu g_{\mu\nu} = p^\mu p_\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m_0^2 \quad (4.2)$$

令两个坐标系的坐标轴分别平行且两个坐标系相对运动的方向沿  $x$  轴方向，洛伦兹变换可以用4.3来表示。

$$p^\mu \longrightarrow p'^\mu = \Lambda^\mu_\nu p^\nu \quad (4.3)$$

其中， $\Lambda^\mu_\nu$  为洛伦兹变换矩阵表示为：

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

根据四动量从一个坐标系变换到另一个坐标系的变换规则，即洛伦兹变换公式4.3。静止质量的平方坐标变换如下，

$$p'^2 = p'^\mu p'^\nu g_{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta g_{\mu\nu} p^\alpha p^\beta = g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = p^2 = m_0^2 \quad (4.5)$$

公式4.5表明了单粒子的静止质量从一个坐标系变换到另一个坐标系在洛伦兹变换4.3下是不变的。

以上的讨论是针对单粒子的情况，对于多粒子系统，它们的总能量和总动量组成一个洛伦兹四矢量。当粒子之间没有相互作用时，洛伦兹不变量依然存在

$$\left( \sum_i E_i \right)^2 - \left( \sum_i \vec{p}_i \right)^2 = constant \quad (4.6)$$

在质心系中  $\sum_i \vec{p}_i^* = 0$ ，这个常数等于  $E^{*2}$ 。通常，这个常数不等于系统的总质量平方  $M_0^2$ 。然而，如果多粒子系统是由单个母粒子（我们用其质量  $M_0$  来标记它）衰变产生的，则该常数等于母粒子总静止质量的平方  $M_0^2$ ， $M_0$  被称为这个多粒子系统的不变质量。这个比较容易理解，因为如果这些粒子是由一个粒子衰变而来，根据相对论碰撞中动量守恒和能量守恒， $\sum_i E_i$  必然等于衰变粒子的能量，而  $\sum_i \vec{p}_i$  必然等于衰变粒子的动量，因此根据4.2式，4.6式中的常数必为衰变粒子静止质量的平方。

根据以上的分析，对于  $\Lambda$  衰变为  $p^+$  和  $\pi^-$  的反应，我们把同一个事例中所有的  $p^+$  和  $\pi^-$  配对，并根据方程4.7计算方程4.6中的常量。如果  $p^+$  和  $\pi^-$  从  $\Lambda$  衰变，则常数应为  $\Lambda$  不变质量的平方。

$$(E_{p^+} + E_{\pi^-})^2 - (\vec{p}_{p^+} + \vec{p}_{\pi^-})^2 = \text{constant} \quad (4.7)$$

方程4.7中使用了单个粒子能量和动量之间的关系

$$\begin{aligned} E_{p^+} &= \sqrt{\vec{p}_{p^+}^2 + m_{p^+}^2} \\ E_{\pi^-} &= \sqrt{\vec{p}_{\pi^-}^2 + m_{\pi^-}^2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

这里注意由同一个  $\Lambda$  衰变而来的  $p^+$  和  $\pi^-$ ，利用公式4.7计算得到的常量一定是  $\Lambda$  不变质量的平方，但反过来，任意一个  $p^+$  和一个  $\pi^-$  利用公式4.7计算得到的常量即使是  $\Lambda$  不变质量的平方，也不一定能确定这两个粒子就是由  $\Lambda$  衰变而来，这可能是由于随机巧合等原因，由公式4.7计算出来的常量刚好是  $\Lambda$  质量的平方，因此为了去除这种情况，我们还会加一些拓扑筛选条件。但是如果由公式4.7计算得到的常量不是  $\Lambda$  不变质量的平方则这两个粒子一定不是由  $\Lambda$  衰变而来。

这里需要注意粒子的质量并不总是一个固定的值，它可以取不同的值。粒子质量取不同值的概率遵循一定的分布。最有可能的值是中心值  $M_0$ ，也就是我们所说的粒子质量。这种质量的不确定性被称为粒子的质量宽度。我们可以这样理解，根据量子力学中的不确定性原理，粒子寿命  $\tau$  和能量宽度  $\Gamma$  之间存在如下关系：

$$\Gamma\tau \sim \hbar \quad (4.9)$$

在粒子自身的坐标系中，能量等于其静止质量。通过4.9可以看出寿命越短，质量宽度就越大。因此，对于一些短寿命粒子来说，它们的质量不是一个固定的值，而是有一个质量宽度且服从一定的分布。因此，我们可以通过填充粒子质量分布的直方图来找到这种粒子。

### 4.3.1 $\Lambda$ 超子的重建方法及拓扑筛选条件

$\Lambda$  ( $\bar{\Lambda}$ ) 粒子重建时要用到次级粒子，包括质子  $p^+$  ( $p^-$ ) 和  $\pi$  介子  $\pi^-$  ( $\pi^+$ )。为了鉴别重建所需要的次级粒子质子和  $\pi$  介子，我们使用了带电粒子在 STAR 时间投影室 (TPC) 中气体的电离能损来鉴别这些带电粒子。

在鉴别这些粒子之前我们当然要像鉴别 K 介子那样首先进行事例挑选，事例挑选已经在4.1节讨论过，其挑选出来的好的事例用来作为样本来估计净-K、净- $\Lambda$  和净-(K+ $\Lambda$ ) 的分布。

就像鉴别 K 介子时那样，挑选出好的事例之后我们还要对径迹做一个筛选以此来提高重建出来的  $\Lambda$  的纯度。对于质子和  $\pi$  介子我们使用的径迹筛选条件和 K 介子略有不同。

我们挑选径迹的横动量 ( $p_T$ )  $> 0.05$  GeV/c 且快度 ( $|y|$ )  $< 1.0$ 。在 TPC 探测器中, 一条径迹最多可以有 45 个击中点, 我们挑选使用了最少 15 个击中点作为拟合点进行拟合从而重建出的径迹, 即  $nFitPoints > 15$ 。由于一条径迹最多可以有 45 个击中点, 而我们挑选的拟合点的下限为 15, 为了避免分裂径迹的重复记数, 我们增加了筛选条件, 径迹重建所用到的拟合点相对于该径迹所有可能的拟合点的占比要大于 52%, 即  $nFitpnts/nFitPoss > 0.52$ 。计算出每单位长度相应的电离能量损失 ( $dE/dx$ ) 所需的最少击中点数为 5 个。挑选出好的径迹之后我们还要对径迹进行鉴别, 以筛选出重建所需要的  $p^+$ 、 $p^-$  和  $\pi^-$ 、 $\pi^+$ , 我们使用 TPC 探测器中的电离能损来鉴别质子和  $\pi$  介子。我们使用的筛选条件为  $|n\sigma_p| < 2$  和  $|n\sigma_\pi| < 2$ 。挑选出质子和  $\pi$  介子之后我们再根据电荷的正负来判断是  $p^+$  还是  $p^-$  或者是  $\pi^-$  还是  $\pi^+$ 。

表4.3是重建  $\Lambda$  所需的质子和  $\pi$  介子径迹筛选条件, 按照表格所列的条件筛选出所需的径迹并鉴别出粒子径迹之后, 我们就开始重建  $\Lambda$  粒子。

表 4.3: 重建  $\Lambda$  所需的质子和  $\pi$  介子径迹筛选条件

横动量 ( $p_T$ )	$> 0.05$ GeV/c
快度 ( $ y $ )	$< 1.0$
nFitPoints	$> 15$
nhitsdedx	$> 5$
nFitpnts/nFitPoss	$> 0.52$
$ n\sigma_p $	$< 2$
$ n\sigma_\pi $	$< 2$

先来看一下  $\Lambda$  衰变的拓扑结构, 从示意图4.9中可以看到在金核 + 金核碰撞中, 两个金核在主碰撞顶点 (PV) 碰撞, 碰撞将产生大量粒子, 包括  $\Lambda$  和  $\bar{\Lambda}$ , 由于  $\Lambda(\bar{\Lambda})$  不带电因此它们将沿直线飞行一段时间, 然后衰变。它的衰变顶点记为 V0 点, 由于 TPC 中存在均匀的磁场和电场, 因此衰变产生的  $p^+$  和  $\pi^-$  ( $p^-$  和  $\pi^+$ ) 在 TPC 中沿着螺旋线飞行。

下面介绍重建  $\Lambda$  的步骤。如前所述, 为了重建  $\Lambda(\bar{\Lambda})$ , 我们需要首先挑选出  $p^+$  径迹和  $\pi^-$  径迹 ( $p^-$  径迹和  $\pi^+$  径迹)。通过这些径迹结合磁场强度, 我们就可以得到质子螺旋线和  $\pi$  介子螺旋线。对于每个  $p^+$  螺旋线, 我们将其与该事例中的所有  $\pi^-$  螺旋线逐一进行配对, 并假设这两个粒子螺旋线是由同一个  $\Lambda$  衰变而来, 然后再根据  $\Lambda$  衰变的拓扑结构加上拓扑筛选条件来剔除背景。

当每次配对时, 我们首先找到  $p^+$  螺旋线上最靠近  $\pi^-$  螺旋线的点的三维坐标, 类似地, 也可以找到  $\pi^-$  螺旋线上最靠近  $p^+$  螺旋线的点的三维坐标。把这两个三维坐

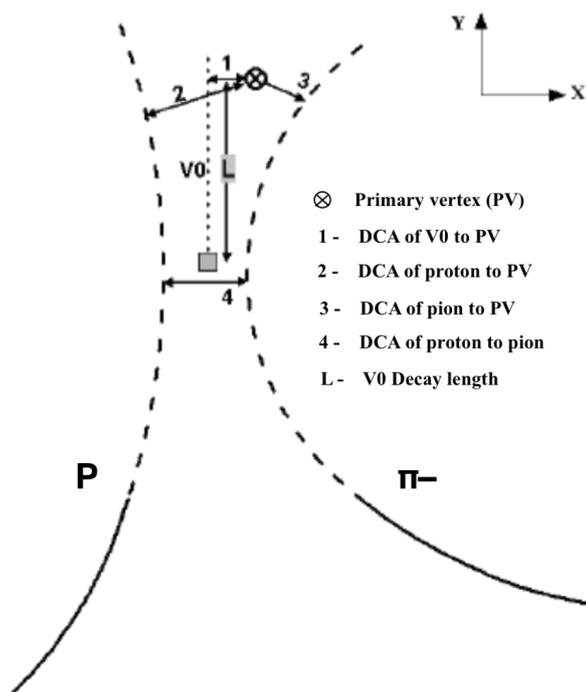


图 4.9: Lambda 衰变拓扑结构图。

标相减得到一个三维矢量，然后计算这个矢量的模就得到  $p^+$  螺旋线与  $\pi^-$  螺旋线最接近的距离，通常我们把它称为  $dca_2$ ，在图4.9中标记为 4。由于我们已经知道质子径迹、 $\pi$  介子径迹和主碰撞顶点，我们可以得到质子到主碰撞顶点的最接近的距离  $DCA_p$  和  $\pi$  介子到主碰撞顶点的最接近的距离  $DCA_\pi$ ，我们在图4.9中分别标记为 2 和 3。

由于假设这两个螺旋线是由同一个  $\Lambda$  衰变而来，我们把两个螺旋线上两个最接近彼此点的中间认为是  $\Lambda$  的衰变点。那么可以得到从主碰撞顶点到  $\Lambda$  衰变点的飞行距离矢量  $\vec{r}$ ，它的模称为  $\Lambda$  衰变距离。接下来重建  $\Lambda$  的洛伦兹四动量，我们也可以从探测器读到质子和  $\pi$  介子螺旋线在最接近彼此点的动量，我们认为这个点的动量就是质子和  $\pi$  介子刚由  $\Lambda$  衰变时的动量，结合质子和  $\pi$  介子的质量是已知的，因此就可以得到质子和  $\pi$  介子的洛伦兹四动量，因为假设这两个粒子由同一个  $\Lambda$  衰变而来，由能量守恒与动量守恒，就可以得到  $\Lambda$  的洛伦兹四动量  $p_\Lambda^\mu$ ：

$$p_\Lambda^\mu = (E_\Lambda, \vec{p}_\Lambda) = (E_{p+\pi}, \vec{p}_{p+\pi}) \quad (4.10)$$

由  $\Lambda$  的洛伦兹四动量，利用公式4.2就可以得到  $\Lambda$  的不变质量。

$$p_\Lambda^2 = E_\Lambda^2 - \vec{p}_\Lambda^2 = m_\Lambda^2 \quad (4.11)$$

由于我们知道  $\Lambda$  的衰变点、 $\Lambda$  的飞行距离矢量  $\vec{r}$  和  $\Lambda$  的动量方向，我们可以找到  $\Lambda$  的动量方向上距离主碰撞顶点最近的点，用主碰撞顶点位置坐标减去这个点位置

坐标得到一个三维矢量，然后对这个矢量求模就可以得到  $\Lambda$  到主碰撞顶点的最接近的距离。我们把这个距离称为  $dcav_0$ ，我们在图4.9中将其标记为 1。

这里只是假设任意一对质子和  $\pi$  介子是由同一个  $\Lambda$  粒子衰变而来，实际情况可能是这两个粒子是毫不相干，因此由以上步骤计算出来所谓的  $\Lambda$  的质量并不一定真的就等于  $\Lambda$  的质量，它可能只是任意挑选了两个无关的质子和  $\pi$  介子，并如前文所述操作计算出了  $\Lambda$  的四动量，并由此计算出所谓的  $\Lambda$  的质量。这和之前对公式4.7的讨论是一致的，我们可以看到这里的  $E_\Lambda$  就是公式4.7中的  $\sum_i E_i$ 、 $\vec{p}_\Lambda$  就是公式4.7中的  $\sum_i \vec{p}_i$ ，因此这里算出来的  $\Lambda$  的质量就是公式4.7中，当两个粒子情况时洛伦兹不变量的开方。

若这个洛伦兹不变量不是  $\Lambda$  质量的平方，则这两个径迹必定不是由同一个  $\Lambda$  衰变而来。由于  $\Lambda$  粒子质量不是一个确定的值，我们选择  $\Lambda$  质量窗口为： $1.112 < m_\Lambda < 1.12 \text{ GeV}/c^2$ 。如之前所讨论，即使这个所谓的  $\Lambda$  的质量在我们所选的质量窗口区间，也不能确定这两个粒子就是由同一个  $\Lambda$  衰变而来，这可能是由于随机巧合把两个不是同一个  $\Lambda$  衰变而来的质子和  $\pi$  介子配对在一起利用公式4.11算出来的所谓的  $\Lambda$  的质量刚好落在  $\Lambda$  质量窗口，我们把这种情况下所谓的  $\Lambda$  叫做背景。因此还要加一些拓扑筛选条件来剪除由于这种重建方法引入的背景。现在来看一下拓扑筛选条件。

- 首先，主碰撞顶点产生  $\Lambda$  的的动量方向 ( $\vec{p}$ ) 和飞行方向 ( $\vec{r}$ ) 应该是一致的，我们加了一个比较宽松的筛选条件  $\vec{r} \cdot \vec{p} > 0$ 。此外，我们还要求  $\Lambda$  到主碰撞顶点的最接近的距离 ( $dcav_0$ ) 要小于 0.5 cm。
- 在主碰撞顶点产生  $\Lambda$  后，它将会飞行一段距离，然后衰变成  $p^+$  和  $\pi^-$ 。之后带电的衰变产物在均匀的电磁场中沿着螺旋线飞行，因此质子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离  $DCA_p$  应该大于一定的值。因此，需要对其施加了一个下限。在分析中，我们使用质子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离大于 0.5 cm。
- 类似地，衰变产物  $\pi^-$  螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离  $DCA_\pi$  也应该大于一定的值。因此，也应该对其施加了一个下限。在分析中，我们使用  $\pi$  介子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离大于 1.5 cm。
- 然后，我们要求质子螺旋线到  $\pi$  介子螺旋线最接近的距离有个上限，因为衰变产物  $p^+$  和  $\pi^-$  来自同一点，因此这两个螺旋线应该只在一点重合。在分析中，我们使用质子螺旋线到  $\pi$  介子螺旋线最接近的距离小于 0.6 cm。
- 最后，在主碰撞顶点产生  $\Lambda$  后，它将飞行一段距离，然后衰变，这个距离我们称为衰变长度，我们限制它的下限，在分析中，我们要求它大于 3.0 cm。

在分析中，我们选择了横向动量范围  $0.4 < p_T < 1.6 \text{ GeV}/c$  且快度区间  $|y| < 0.5$  的相空间。在表4.4中我们列出了拓扑筛选条件还有横向动量和快度的选取区间。

表 4.4: 重建  $\Lambda$  的拓扑筛选条件

$\Lambda$ 到主碰撞顶点的最接近的距离 (dcav0)	$< 0.5 \text{ cm}$
质子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离	$> 0.5 \text{ cm}$
$\pi$ 介子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离	$> 1.5 \text{ cm}$
质子螺旋线到 $\pi$ 介子螺旋线最接近的距离	$< 0.6 \text{ cm}$
衰变长度 (L)	$> 3.0 \text{ cm}$
$\vec{r} \cdot \vec{p}$	$> 0$
$\Lambda$ 的横动量 ( $p_T$ )	$0.4 < p_T < 1.6 \text{ GeV}/c$
$\Lambda$ 的快度 ( $ y $ )	$< 0.5$
$\Lambda$ 的质量 $m_\Lambda$	$1.112 < m_\Lambda < 1.12 \text{ GeV}/c^2$

### 4.3.2 $\Lambda$ 超子的纯度

当我们重建  $\Lambda$  时, 可以使用各种拓扑筛选条件来减少  $\Lambda$  的背景。但依旧会有少量的背景混在  $\Lambda$  的不变质量谱中。图4.10展示了金核 + 金核 27 GeV 碰撞能量下 9 个不同中心度的  $\Lambda$  不变质量谱, 图4.11展示了金核 + 金核 27 GeV 碰撞能量下 9 个不同中心度的  $\bar{\Lambda}$  不变质量谱。红色质量区间是我们选取的  $\Lambda$  信号窗口区间, 蓝色质量区间是我们选取的通过 side band 方法估计  $\Lambda$  纯度的区间。

所谓的 side band 方法是指, 在  $\Lambda$  信号窗口区间左右两侧对称的位置各选择一段区间, 称为 side band 区间, 用这两个区间的背景数目估计  $\Lambda$  信号窗口区间的背景数目。我们认为背景主要来源于不是来自同一个  $\Lambda$  衰变产生的任意两个  $p^+$  和  $\pi^-$  的随机组合和粒子种类错判。

背景的质量分布是线性的, 所以如果选取关于  $\Lambda$  信号窗口左右两侧对称且每一侧质量宽度与信号窗口质量宽度相同的 side band 区间, 那么左右 side band 区间背景数目的平均值可以被认为是信号窗口区间的背景数。这里对 side band 区间的选取也有一定的要求。它不应该太靠近信号区间, 因为  $\Lambda$  的质量分布本来就有一个宽度, 当太靠近信号区间时这里本来就会有较多真正的  $\Lambda$  信号, 这样用来估计背景的 side band 区间就会包含较多的信号。同时 side band 区间也不能偏离信号区间太远, 因为如果离信号区间太远, side band 区间的背景又不能很好的反映信号区间的背景分布情况。这里我列出了用于估计  $\Lambda$  纯度的信区间和 side band 区间:

- 信号区间:  $1.112 - 1.12 \text{ GeV}/c^2$
- 左 side band 区间:  $1.092 - 1.10 \text{ GeV}/c^2$

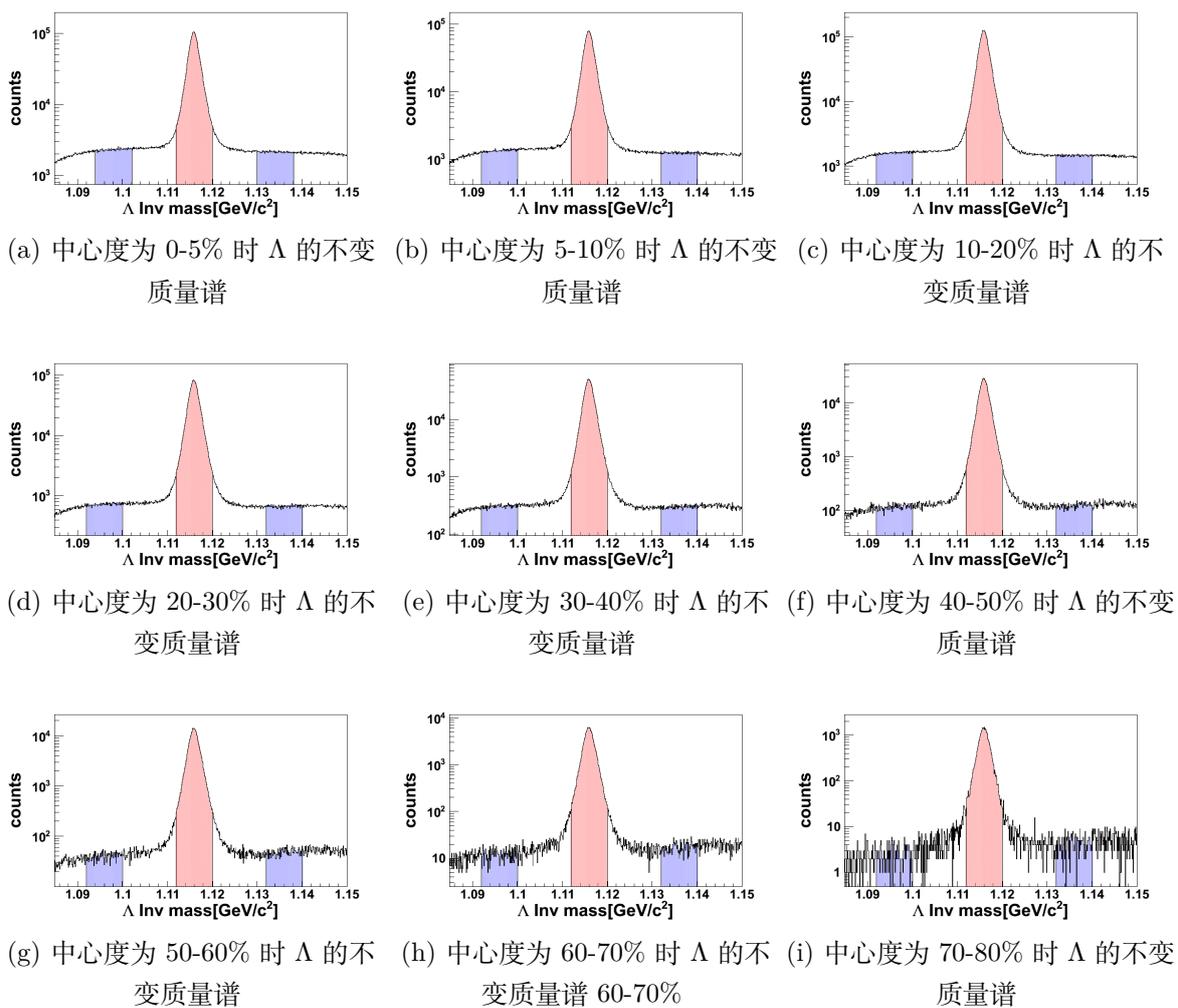


图 4.10: 金核 + 金核 27 GeV 碰撞能量下 9 种不同中心度的  $\Lambda$  不变质量谱

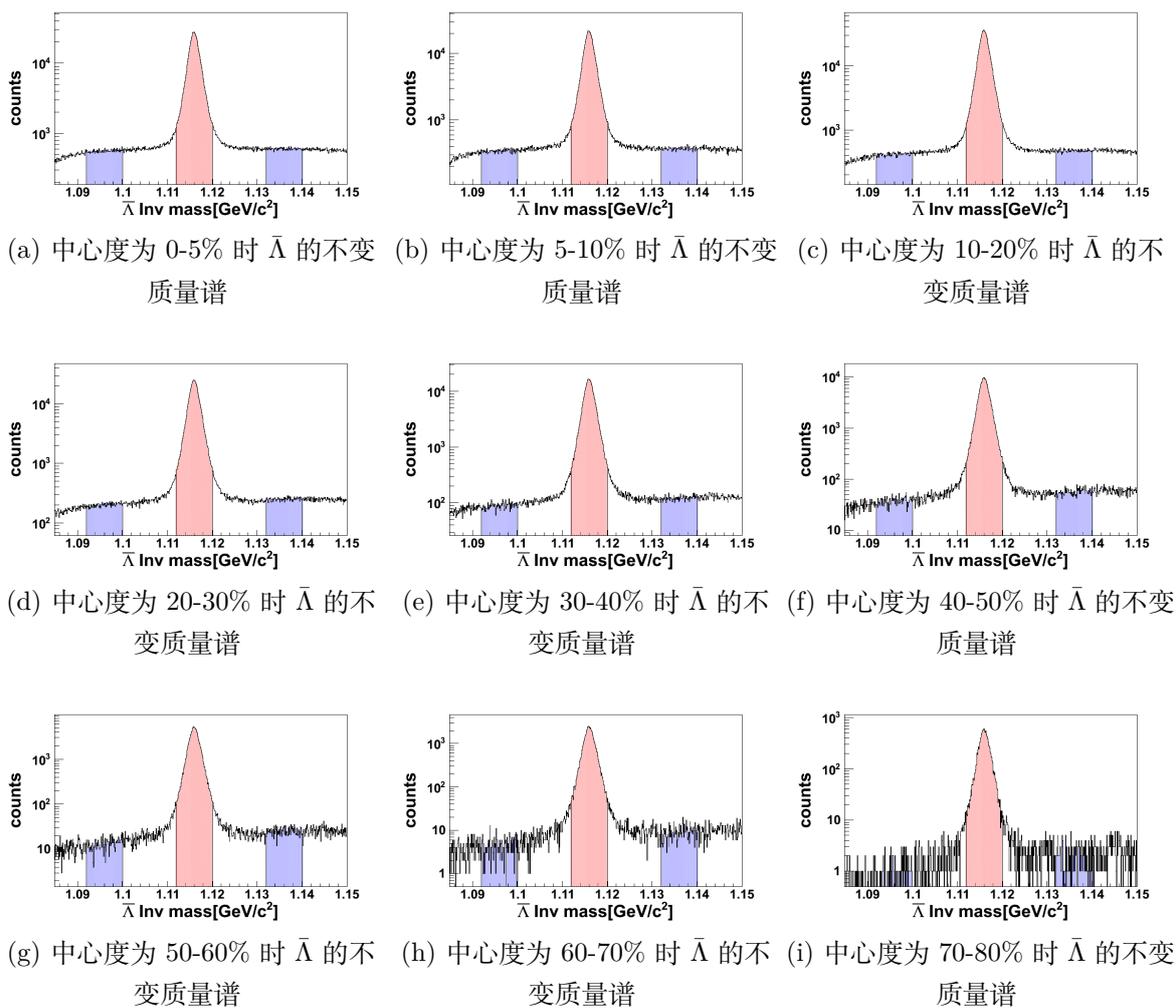


图 4.11: 金核 + 金核 27 GeV 碰撞能量下 9 种不同中心度的  $\bar{\Lambda}$  不变质量谱

- 右 side band 区间:1.132 - 1.14  $GeV/c^2$

纯度计算公式为4.12式，这里  $N_B$  是信号窗口区间的背景数，我们可以通过计算 side band 区间背景的平均值来估计它。 $N_S + N_B$  是信号区间的信号与背景数目之和。所以纯度是 1 减去信号区间背景的比例。

$$\text{purity} = 1 - \frac{N_B}{N_S + N_B} \quad (4.12)$$

其中， $N_B$  的计算公式为：

$$N_B = \frac{W_{\text{signal}}}{W_{\text{side band}}} \cdot N_{\text{side band}} \quad (4.13)$$

这里由于我们对于 side band 区间的选取，使得  $W_{\text{signal}}/W_{\text{side band}} = 1/2$ ，而  $N_{\text{side band}}$  是两侧 side band 区间总背景数，因而在这里我们说  $N_B$  等于两侧 side band 区间总背景数的平均值。

图4.12是金核 + 金核 27 GeV 碰撞能量下不同中心度时选取不同信号区间  $\Lambda$  的纯度。图中横坐标表示不同的中心度，纵坐标是  $\Lambda$  的纯度值，不同颜色的标号代表我们选取的 5 个不同的信号区间，分别是：1.11 ~ 1.12 $GeV/c^2$ ，1.112 ~ 1.12 $GeV/c^2$ ，1.11568 - 0.004 ~ 1.11568 + 0.004 $GeV/c^2$ ，1.11568 - 0.005 ~ 1.11568 + 0.005 $GeV/c^2$ ，1.11568 - 0.006 ~ 1.11568 + 0.006 $GeV/c^2$ 。图4.13是不同中心度下选取不同信号区间  $\bar{\Lambda}$  的纯度。从两个图中可以看出选择这个信号区间  $\Lambda$  的纯度比较高，所以在分析中，我们最终选择信号区间为 1.112-1.12 $GeV/c^2$ 。

我把金核 + 金核 27 GeV 碰撞能量下不同中心度下  $\Lambda$  和  $\bar{\Lambda}$  的纯度值列在表4.5中。

表 4.5: 不同中心度下  $\Lambda$  和  $\bar{\Lambda}$  的纯度

中心度	$\Lambda$ 纯度	$\bar{\Lambda}$ 纯度
0-5%	0.939621	0.939546
5-10%	0.952438	0.952377
10-20%	0.963862	0.96318
20-30%	0.974421	0.972945
30-40%	0.981652	0.980373
40-50%	0.986641	0.984703
50-60%	0.990051	0.988089
60-70%	0.992508	0.991082
70-80%	0.992387	0.992178

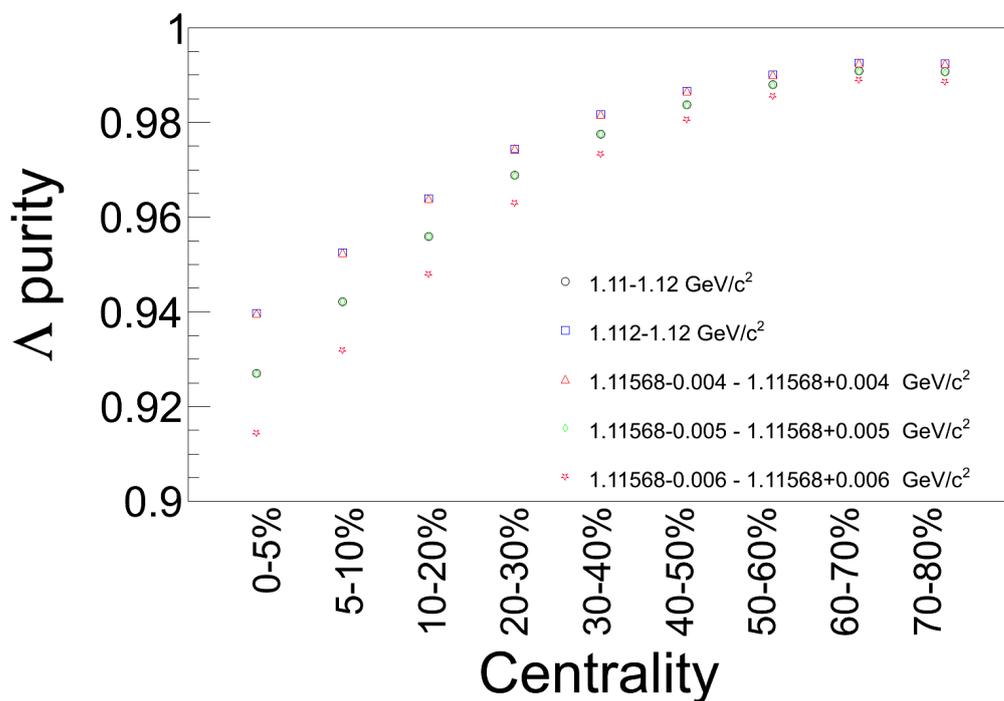


图 4.12: 金核 + 金核 27 GeV 碰撞能量下不同中心度下选取不同信号区间  $\Lambda$  的纯度。

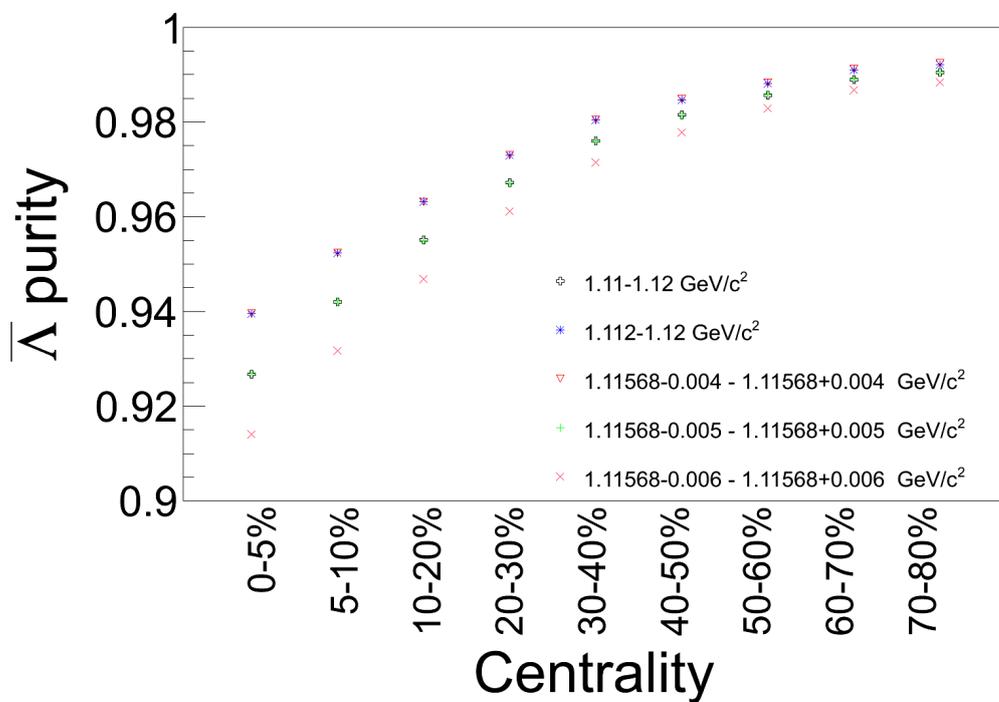


图 4.13: 金核 + 金核 27 GeV 碰撞能量下不同中心度下选取不同信号区间  $\bar{\Lambda}$  的纯度。

## 4.4 对 K 介子和 $\Lambda$ 效率的修正

### 4.4.1 二项式模型

在相对论重离子碰撞中，通常我们并不知道在每个事例中产生了多少个粒子，即有多少个粒子向探测器打来，但每个事例中产生的粒子数目总是服从一个分布，我们假设这个多重数分布是  $P(N)$  (这里的变量  $N$  是离散的，它表示随机变量取某个值的概率)，一般来说  $P(N)$  服从泊松分布。这里要注意打向探测器的粒子不一定都能被探测器响应，因而不是所有打向探测器的粒子都能被探测到，也就是说探测器存在一个探测效率的问题，其效率并不是百分之百，不能记录所有打向探测器的粒子。我们只能知道最终探测器探测到的粒子，因此需要对探测器的效率做一个修正来还原每个事例到底有多少个粒子产生。这里我们介绍效率修正的方法。

对于每个粒子，假设被探测到的概率为  $p$ ，未被探测到的概率就是  $1-p$ ，由此可以看出对一个确定的粒子能不能被探测器探测到服从 (0-1) 分布。对于每个粒子能否被探测到是一个独立的事件，与其它粒子能否被探测到无关，且每个粒子能否被探测到服从相同的 (0-1) 分布。因此，当实际产生的  $N$  个粒子时，对  $N$  个粒子做探测相当于做了一个  $N$  重伯努利试验，而被探测到的粒子数  $n$  服从二项分布（伯努利分布），记为  $B_{p,N}(n)$ ，其形式如下：

$$B_{p,N}(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} \quad (4.14)$$

可以看出 (0-1) 分布就是  $N=1$  时的二项分布。

我们用  $n$  表示每个事例中被探测到的粒子数，用  $N$  表示每个事例中实际产生的粒子数，用  $\tilde{P}(n)$  来表示探测到的粒子数量的分布，用  $P(N)$  表示实际产生的粒子数量的分布。 $P(N)$  和  $\tilde{P}(n)$  之间的关系可以表示为 [60]：

$$\tilde{P}(n) = \sum_{N=n} P(N) B_{p,N}(n) \quad (4.15)$$

对于4.15式我们可以这样理解，当实际产生的粒子数  $N$  确定时，探测到的粒子数  $n$  服从二项分布  $B_{p,N}(n)$ 。但实际上，各个事例中产生的粒子数  $N$  并不是一个不变的常数，不同的事例产生的粒子数并不相同，因而无法预知在一个事例中产生的粒子数  $N$  的确切值，而只能知道  $N$  取不同值的概率。因此在一个事例中产生的粒子数服从一个分布  $P(N)$ 。为了计算探测到的粒子数  $n$  的分布，我们应该对产生粒子数  $N$  取所有可能的值时的情况求和，即，我们应该对有 1 个粒子产生（其概率为  $P(1)$ ）并且  $n$  个粒子被探测测到（其概率为  $B_{p,1}(n)$ ）的情况，有 2 个粒子产生（其概率为  $P(2)$ ）并且  $n$  个粒子被探测测到（其概率为  $B_{p,2}(n)$ ）的情况，...，求和。这里的求和可以一直到无穷。

很容易可以想到，探测到的粒子数  $n$  不可能大于产生的粒子数  $N$ ，这是显而易见的。所以当探测到  $n$  个粒子时，所有产生的粒子数  $N$  小于  $n$  的概率  $P(N)$  将为 0，所以我们可以认为从  $N=n$  求和到无穷大，当然也可以认为从  $N=0$  求和到无穷大，只不过此时  $N < n$  时  $P(N)=0$ 。简而言之，我们使用全概率公式，将产生粒子数  $N$  取所有可能值且被探测到的粒子数为  $n$  的情况求和，然后我们可以得到方程4.15。

使用3.32式，我们可以得到探测到的粒子数  $n$  的分布  $\tilde{P}(n)$  的阶乘累积量生成函数为：

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}_f(s) &= \ln \sum_n \tilde{P}(n)s^n = \ln \sum_n \sum_{N=n} P(N)B_{p,N}(n)s^n \\
 &= \ln \sum_n \sum_{N=n} P(N) \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} s^n \\
 &= \ln \sum_n \sum_{N=n} P(N) \frac{N!}{n!(N-n)!} (sp)^n (1-p)^{N-n} \\
 &= \ln \sum_N \sum_{n=0}^N P(N) \frac{N!}{n!(N-n)!} (sp)^n (1-p)^{N-n} \quad (4.16) \\
 &= \ln \sum_N P(N) (1-p+sp)^N \\
 &= \ln \langle (1-p+sp)^N \rangle \\
 &= \ln \langle s'^N \rangle \\
 &= C_f(s')
 \end{aligned}$$

其中，我们做了变量代换  $s'=1-p+sp$ 。

可以看出在4.16式中， $\tilde{C}_f(s)$  是探测到的粒子数  $n$  的阶乘累积量生成函数， $C_f(s')$  是实际产生的粒子数  $N$  的阶乘累积量生成函数，这里我们用随机变量  $N$  来代替方程3.32中的随机变量  $X$ 。通常，我们用  $X$  表示连续型随机变量，用  $N$  表示离散型随机变量。

利用方程3.32和方程4.16，我们可以得到探测到的粒子数  $n$  的分布  $\tilde{P}(n)$  的一阶阶乘累积量与实际产生的粒子数  $N$  的分布  $P(N)$  的一阶阶乘累积量之间的关系，

$$\frac{\partial \tilde{C}_f(s)}{\partial s} = \frac{\partial C_f(s')}{\partial s} = \frac{\partial C_f(s')}{\partial s'} \frac{\partial s'}{\partial s} = p \frac{\partial C_f(s')}{\partial s'} \quad (4.17)$$

类似的，我们可以得到探测到的粒子数  $n$  的分布  $\tilde{P}(n)$  的二阶阶乘累积量与实际产生的粒子数  $N$  的分布  $P(N)$  的二阶阶乘累积量之间的关系，

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \tilde{C}_f(s)}{\partial s^2} &= \frac{\partial}{\partial s} \left( p \frac{\partial C_f(s')}{\partial s'} \right) = p \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial C_f(s')}{\partial s'} \\
 &= p \frac{\partial s'}{\partial s} \frac{\partial^2 C_f(s')}{\partial s'^2} = p^2 \frac{\partial^2 C_f(s')}{\partial s'^2}
 \end{aligned} \quad (4.18)$$

同样，我们可以得到

$$\left. \frac{\partial^m \tilde{C}_f(s)}{\partial s^m} \right|_{s=1} = p^m \left. \frac{\partial^m C_f(s')}{\partial s'^m} \right|_{s'=1} \quad (4.19)$$

注意，由于  $s'=1-p+sp$ ，当  $s$  等于 1 时  $s'$  也等于 1，所以我们可以确保在 4.19 中当  $s=1$  时， $s'$  也等于 1。

利用阶乘累积量的定义式 3.31，公式 4.19 可以变成，

$$\kappa_m(n) = p^m \kappa_m(N) \quad (4.20)$$

在公式 4.20 中， $m$  表示阶乘累积量的阶数， $n$  表示探测到的粒子的数量， $N$  表示实际产生的粒子数量。

#### 4.4.2 单变量情况下的效率修正

在上一节中已经介绍过，我们无法知道实际产生的粒子数量，只能知道探测到的粒子数量，所以只能计算探测到的粒子数的累积量。但是怎样才能知道实际产生粒子数的累积量呢？我们需要做效率修正，经过效率修正后，就可以知道实际产生粒子数的累积量。

应该如何进行效率修正呢？我们可以利用在第 4.4.1 节中得到的阶乘累积量之间的关系式 4.20。因此，如果知道未校正的阶乘累积量，并且知道探测器的效率  $p$ ，就可以知道校正后的阶乘累积量，即实际产生的粒子数的累积量。因此，我们可以通过以下步骤进行累积量效率修正：

- 首先，使用方程 3.36 到 3.39 将实际产生粒子数的累积量转换为阶乘累积量。
- 第二步，使用方程 4.20 将实际产生粒子数的阶乘累积量转换为探测到的粒子数的累积量。
- 最后一步，使用方程 3.40 到 3.43 将探测到的粒子数的阶乘累积量转换为累积量。

按照以上三个步骤，我把前四阶累积量修正的公式列在这里 [55]，

$$c_1(N) = \kappa_1(N) = \frac{\kappa_1(n)}{p} = \frac{c_1(n)}{p} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} c_2(N) &= \kappa_2(N) + \kappa_1(N) = \frac{\kappa_2(n)}{p^2} + \frac{\kappa_1(n)}{p} \\ &= \frac{c_2(n) - c_1(n)}{p^2} + \frac{c_1(n)}{p} \\ &= \frac{c_2(n)}{p^2} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\right)c_1(n) \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned}
 c_3(N) &= \kappa_3(N) + 3\kappa_2(N) + \kappa_1(N) \\
 &= \frac{\kappa_3(n)}{p^3} + 3\frac{\kappa_2(n)}{p^2} + \frac{\kappa_1(n)}{p} \\
 &= \frac{c_3(n) - 3c_2(n) + 2c_1(n)}{p^3} + 3\frac{c_2(n) - c_1(n)}{p^2} + \frac{c_1(n)}{p} \\
 &= \frac{c_3(n)}{p^3} + \left(\frac{-3}{p^3} + \frac{3}{p^2}\right)c_2(n) + \left(\frac{2}{p^3} - \frac{3}{p^2} + \frac{1}{p}\right)c_1(n)
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
 c_4(N) &= \kappa_4(N) + 6\kappa_3(N) + 7\kappa_2(N) + \kappa_1(N) \\
 &= \frac{\kappa_4(n)}{p^4} + 6\frac{\kappa_3(n)}{p^3} + 7\frac{\kappa_2(n)}{p^2} + \frac{\kappa_1(n)}{p} \\
 &= \frac{c_4(n) - 6c_3(n) + 11c_2(n) - 6c_1(n)}{p^4} \\
 &\quad + 6\frac{c_3(n) - 3c_2(n) + 2c_1(n)}{p^3} + 7\frac{c_2(n) - c_1(n)}{p^2} + \frac{c_1(n)}{p} \\
 &= \frac{1}{p^4}c_4(n) + \left(-\frac{6}{p^4} + \frac{6}{p^3}\right)c_3(n) + \left(\frac{11}{p^4} - \frac{18}{p^3} + \frac{7}{p^2}\right)c_2(n) \\
 &\quad + \left(-\frac{6}{p^4} + \frac{12}{p^3} - \frac{7}{p^2} + \frac{1}{p}\right)c_1(n)
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

在这里我们对探测器的效率修正做一个总结，我们首先根据4.15式得到探测到的粒子数  $\tilde{P}(n)$  与实际产生的粒子数分布  $P(N)$  之间的关系，然后推导得到它们阶乘累积量生成函数之间的关系4.16，最后就可以得到阶乘累积量之间的关系4.20。想要对累积量做效率修正要把它们转化为检查累积量，然后根据关系4.20做效率修正后再转化为累积量。

#### 4.4.3 多变量情况下的效率修正

现在我们来讨论多变量情况下的效率修正。和单变量情况类似，我们假设标记为  $i$  的粒子的探测效率为  $p_i$ ，并假设各个粒子能不能被探测器探测到是相互独立的且被探测到的效率都相同，那么  $P(\vec{N})$  和  $\tilde{P}(\vec{n})$  之间的关系可以表示为 [56]，

$$\tilde{P}(\vec{n}) = \sum_{\vec{N}=\vec{n}} P(\vec{N}) \prod_{i=1}^M B_{p_i, N_i}(n_i) \tag{4.25}$$

其中  $\tilde{P}(\vec{n})$  表示探测到的粒子数的联合概率分布函数， $P(\vec{N})$  表示实际产生的粒子数的联合概率分布函数， $B_{p_i, N_i}(n_i)$  是二项分布，其具形式如下：

$$B_{p_i, N_i}(n_i) = \frac{N_i!}{n_i!(N_i - n_i)!} p_i^{n_i} (1 - p_i)^{N_i - n_i} \tag{4.26}$$

我们在第4.4.1节中介绍了公式 4.15 的含义，公式 4.25 类似于公式 4.15，公式 4.15 是单变量情况，而公式 4.25 是多变量情况。对于多变量情况，当产生的粒子数  $N_i$  和  $N_j$  确定时，探测到的粒子数  $n_i$  和  $n_j$  的分布是  $B_{p_i, N_i}(n_i)$  和  $B_{p_j, N_j}(n_j)$ 。 $N_i$  与  $N_j$  是独立的， $n_i$  与  $n_j$  同样也是独立的。因此当产生的粒子数为  $N_i$  与  $N_j$  时，探测到的粒子数  $n_i$  与  $n_j$  的联合概率分布函数是  $B_{p_i, N_i}(n_i)$  和  $B_{p_j, N_j}(n_j)$  的乘积。因此对于  $M$  个变量且产生的粒子数服从  $P(\vec{N})$  分布的情况，我们可以得到探测到的粒子数的联合分布函数 4.25 式。

使用公式 3.57 和 4.25，我们可以得到  $\tilde{P}(n)$  的阶乘累积量生成函数为，

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}_f(\vec{s}) &= \ln \sum_{\vec{n}} \tilde{P}(\vec{n}) \prod_{i=1}^M s_i^{n_i} = \ln \sum_{\vec{n}} \sum_{\vec{N}=\vec{n}} P(\vec{N}) \prod_{i=1}^M B_{p_i, N_i}(n_i) s_i^{n_i} \\
 &= \ln \sum_{\vec{n}} \sum_{\vec{N}=\vec{n}} P(\vec{N}) \prod_{i=1}^M \frac{N_i!}{n_i!(N_i - n_i)!} p_i^{n_i} (1 - p_i)^{N_i - n_i} s_i^{n_i} \\
 &= \ln \sum_{\vec{n}} \sum_{\vec{N}=\vec{n}} P(\vec{N}) \prod_{i=1}^M \frac{N_i!}{n_i!(N_i - n_i)!} (s_i p_i)^{n_i} (1 - p_i)^{N_i - n_i} \\
 &= \ln \sum_{\vec{N}} \sum_{\vec{n}=0}^{\vec{N}} P(\vec{N}) \prod_{i=1}^M \frac{N_i!}{n_i!(N_i - n_i)!} (s_i p_i)^{n_i} (1 - p_i)^{N_i - n_i} \quad (4.27) \\
 &= \ln \sum_{\vec{N}} P(\vec{N}) \prod_{i=1}^M (1 - p_i + s_i p_i)^{N_i} \\
 &= \ln \left\langle \prod_{i=1}^M (1 - p_i + s_i p_i)^{N_i} \right\rangle \\
 &= C_f(1 - \vec{p} + \vec{s}\vec{p}) \\
 &= C_f(\vec{s}')
 \end{aligned}$$

这里  $\vec{s}' = 1 - \vec{p} + \vec{s}\vec{p}$  即  $s_i' = 1 - p_i + s_i p_i$ 。

利用探测到的粒子数和实际产生的粒子数阶乘累积量生成函数之间的关系，我们可以得到：

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^M a_i \frac{\partial C_f(\vec{s}')}{\partial s_i'} &= \sum_{i=1}^M a_i \frac{\partial \tilde{C}_f(\vec{s})}{\partial s_i'} \\
 &= \sum_{i=1}^M a_i \frac{\partial \tilde{C}_f(\vec{s})}{\partial s_i} \frac{\partial s_i}{\partial s_i'} = \sum_{i=1}^M \frac{a_i}{p_i} \frac{\partial \tilde{C}_f(\vec{s})}{\partial s_i} \quad (4.28)
 \end{aligned}$$

从  $\vec{s}' = 1 - \vec{p} + \vec{s}\vec{p}$  我们可以知道当  $\vec{s} = 1, \vec{s}' = 1$ , 所以我们使用 3.60 可以得到

$$\sum_{i=1}^M \frac{a_i}{p_i} \frac{\partial \tilde{C}_f(\vec{s})}{\partial s_i} \Big|_{\vec{s}=1} = \sum_{i=1}^M a_i \frac{\partial C_f(\vec{s}')}{\partial s_i'} \Big|_{\vec{s}'=1} \quad (4.29)$$

$$\implies \bar{\partial}_{(a/p)} \tilde{C}_f(\vec{s}) \Big|_{\vec{s}=1} = \bar{\partial}_{(a)} C_f(\vec{s}') \Big|_{\vec{s}'=1}$$

$$\implies \kappa_1(q_{(a/p)}) = \kappa_1(Q_{(a)})$$

其中,

$$\bar{\partial}_{(a/p)} = \sum_{i=1}^M \frac{a_i}{p_i} \frac{\partial}{\partial s_i} \quad (4.30)$$

$$q_{(a/p)} = \sum_{i=1}^M \frac{a_i}{p_i} n_i \quad (4.31)$$

与在第3.4节的式3.68 和式3.69中的定义是一致的, 只要令  $1/p=b$  就可以得到式3.68 和式3.69。

$q_{(a)}$  的定义和公式3.46一致, 定义为:

$$q_{(a)} = \sum_{i=1}^M a_i n_i \quad (4.32)$$

这里与公式3.46唯一的不同是我们用小写字母  $q$  表示探测到的粒子数  $n_i$  的线性组合, 用大写字母  $Q$  表示实际产生的的粒子数  $N_i$  的线性组合。

方程4.29联系着  $\tilde{P}(n)$  和  $P(\vec{N})$  的一阶阶乘累积量, 所以我们可以用它对一阶阶乘累积量做效率修正。

现在让我们讨论  $P(N)$  的二阶阶乘累积量和  $\tilde{P}(n)$  的二阶阶乘累积量之间的关系,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_i b_j \frac{\partial}{\partial s_i'} \frac{\partial}{\partial s_j'} C_f(\vec{s}') &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_i b_j \frac{\partial s_i}{\partial s_i'} \frac{\partial}{\partial s_i} \frac{\partial s_j}{\partial s_j'} \frac{\partial}{\partial s_j} \tilde{C}_f(\vec{s}) \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{a_i}{p_i} \frac{b_j}{p_j} \frac{\partial}{\partial s_i} \frac{\partial}{\partial s_j} \tilde{C}_f(\vec{s}) \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\implies \bar{\partial}_{(a)} \bar{\partial}_{(b)} C_f(\vec{s}) = \bar{\partial}_{(a/p)} \bar{\partial}_{(b/p)} \tilde{C}_f(\vec{s})$$

$$\implies \kappa(Q_{(a)} Q_{(b)}) = \kappa(q_{(a/p)} q_{(b/p)})$$

做类似公式4.29和4.33的计算, 我们可以很容易地找到三阶和四阶阶乘累积量之间的关系:

$$\kappa(Q_{(a)} Q_{(b)} Q_{(c)}) = \kappa(q_{(a/p)} q_{(b/p)} q_{(c/p)}) \quad (4.34)$$

$$\kappa(Q_{(a)} Q_{(b)} Q_{(c)} Q_{(d)}) = \kappa(q_{(a/p)} q_{(b/p)} q_{(c/p)} q_{(d/p)}) \quad (4.35)$$

根据前几节的讨论结果，我们可以将多变量情况下效率修正的步骤总结如下：

- 首先，使用方程3.66、3.67、3.70 和3.71将  $P(\vec{N})$  的累积量转换为阶乘累积量。注意，在后三个公式中是混合累积量与混合阶乘累积量之间的关系，如果想得到累积量之间的关系只需要将其中的 b c d 都视为 a。
- 第二步，使用方程4.29、4.33、4.34 和4.35将产生的粒子数分布  $P(\vec{N})$  的阶乘累积量转换为探测到的粒子分布  $\tilde{P}(\vec{n})$  的阶乘累积量。
- 最后一步，使用方程3.72到3.75将探测到的粒子数分布  $\tilde{P}(\vec{n})$  的阶乘累积量转换为累积量。

根据以上讨论的三个步骤，把前四阶累积量修正的公式列在这里：

$$c_1(Q_{(a)}) = \kappa_1(Q_{(a)}) = \kappa_1(q_{(a/p)}) = c_1(q_{(a/p)}) \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} c_2(Q_{(a)}) &= \kappa_2(Q_{(a)}) + \kappa_1(Q_{(a^2)}) \\ &= \kappa_2(q_{(a/p)}) + \kappa_1(q_{(a^2/p)}) \\ &= c_2(q_{(a/p)}) - c_1(q_{(a^2/p^2)}) + c_1(q_{(a^2/p)}) \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} c_3(Q_{(a)}) &= \kappa_3(Q_{(a)}) + \kappa(Q_{(a)}Q_{(a^2)}) + \kappa(Q_{(a^2)}Q_{(a)}) + \kappa(Q_{(a^2)}Q_{(a)}) \\ &\quad + \kappa_1(Q_{(a^3)}) \\ &= \kappa_3(Q_{(a)}) + 3\kappa(Q_{(a)}Q_{(a^2)}) + \kappa_1(Q_{(a^3)}) \\ &= \kappa_3(q_{(a/p)}) + 3\kappa(q_{(a/p)}q_{(a^2/p)}) + \kappa_1(q_{(a^3/p)}) \\ &= c_3(q_{(a/p)}) - 3c(q_{(a/p)}q_{(a^2/p^2)}) + 2c_1(q_{(a^3/p^3)}) \\ &\quad + 3(c(q_{(a/p)}q_{(a^2/p)}) - 3c_1(q_{(a^3/p^2)})) + c_1(q_{(a^3/p)}) \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} c_4(Q_{(a)}) &= \kappa_4(Q_{(a)}) + 6\kappa(Q_{(a)}Q_{(a)}Q_{(a^2)}) + 4\kappa(Q_{(a)}Q_{(a^3)}) \\ &\quad + 3\kappa_2(Q_{(a^2)}) + \kappa_1(Q_{(a^4)}) \\ &= \kappa_4(q_{(a/p)}) + 6\kappa(q_{(a/p)}q_{(a/p)}q_{(a^2/p)}) + 4\kappa(q_{(a/p)}q_{(a^3/p)}) \\ &\quad + 3\kappa_2(q_{(a^2/p)}) + \kappa_1(q_{(a^4/p)}) \\ &= c_4(q_{(a/p)}) - 6c(q_{(a/p)}^2q_{(a^2/p^2)}) + 8c(q_{(a/p)}q_{(a^3/p^3)}) + 3c(q_{(a^2/p^2)}q_{(a^2/p^2)}) \\ &\quad - 6c(q_{(a^4/p^4)}) + 6c(q_{(a/p)}^2q_{(a^2/p)}) - 12c(q_{(a/p)}q_{(a^3/p^2)}) - 6c(q_{(a^2/p)}q_{(a^2/p^2)}) \\ &\quad + 12c_1(q_{(a^4/p^3)}) + 4c(q_{(a/p)}q_{(a^3/p)}) - 4c_1(q_{(a^4/p^2)}) + 3c_2(q_{(a^2/p)}) \\ &\quad - 3c_1(q_{(a^4/p^2)}) + c_1(q_{(a^4/p)}) \end{aligned} \quad (4.39)$$

其中，

$$q_{(a^r/p^s)} = \sum_{i=1}^M (a_i^r/p_i^s)n_i \quad (4.40)$$

我们使用  $q(r,s)$  来简记  $q_{(a^r/p^s)}$ , 即

$$q(r, s) = q_{(a^r/p^s)} \quad (4.41)$$

所以我们可以把方程4.36 到 4.39简写为:

$$c_1(Q_{(a)}) = c_1(q_{(1,1)}) \quad (4.42)$$

$$c_2(Q_{(a)}) = c_2(q_{(1,1)}) - c_1(q_{(2,2)}) + c_1(q_{(2,1)}) \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} c_3(Q_{(a)}) &= c_3(q_{(1,1)}) - 3c(q_{(1,1)}q_{(2,2)}) + 2c_1(q_{(3,3)}) \\ &+ 3c(q_{(1,1)}q_{(2,1)}) - 3c_1(q_{(3,2)}) + c_1(q_{(3,1)}) \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} c_4(Q_{(a)}) &= c_4(q_{(1,1)}) - 6c(q_{(1,1)}^2q_{(2,2)}) + 8c(q_{(1,1)}q_{(3,3)}) + 3c_2(q_{(2,2)}) \\ &- 6c_1(q_{(4,4)}) + 6c(q_{(1,1)}^2q_{(2,1)}) - 12c(q_{(1,1)}q_{(3,2)}) - 6c(q_{(2,1)}q_{(2,2)}) \\ &+ 12c_1(q_{(4,3)}) + 4c(q_{(1,1)}q_{(3,1)}) - 7c_1(q_{(4,2)}) + 3c_2(q_{(2,1)}) + c_1(q_{(4,1)}) \end{aligned} \quad (4.45)$$

在方程4.42中,  $c_1(Q_{(a)})$  表示产生的粒子数 (即效率修正后) 的线性组合  $Q_{(a)}$  的一阶累积量。  $c_1(q_{(1,1)})$  表示探测到 (即未经过效率修正) 的粒子数的线性组合  $q_{(1,1)}$  的一阶累积量,  $q_{(r,s)}$  在方程4.40 和 4.41中定义。

当我们使用公式 4.40 计算  $q_{(r,s)}$  时, 可以认为这里的求和遍及每个事例中所有粒子。在分析中每条径迹的探测效率并不相同, 要分别对每条径迹进行效率修正所以我们使用  $n_i$  等于 1, 即组合每个事例中的所有径迹, 所以这个求和遍及每个事例中的全部径迹。  $a_i^r/p_i^s$  是线性组合系数, 如在第3.4节所讨论过的, 只需令  $a_i$  等于 1、-1 或 0, 我们就可以计算实际产生的任意几种种类的粒子数目之和或者之差的各阶累积量;  $p_i$  是每条径迹的探测效率;  $M$  是一个事例中挑选出来的径迹数。

为了便于理解我在这里举个例子。当我们考虑净质子数时, 对于质子  $a_i = 1$ , 对于反质子  $a_i = -1$ , 对于其它粒子  $a_i = 0$ , 所以  $q_{(1,1)}$  是每个事例中的净质子数。同样, 我们也可以构造净电荷数和净奇异数等。如本文想计算净-( $K+\Lambda$ ), 只需令每个  $K^+$ 、 $K^-$ 、 $\Lambda$ 、 $\bar{\Lambda}$  的系数  $a_i$  等于 +1 或者-1, 而其它的粒子系数  $a_i$  等于 0。

注意方程4.42 到 4.45中有许多混合累积量, 如方程4.44中的  $c(q_{(1,1)}q_{(2,2)})$  和方程4.45中的  $c(q_{(1,1)}^2q_{(2,2)})$ 。在这里我们是把混合累积量转换成混合中心矩, 然后通过计算混合中心矩来计算混合累积量。

随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ( $n > 2$ ) 的混合累积量可以表示为混合中心矩 [61-62]:

$$c(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{\pi} (|\pi| - 1)! (-1)^{(|\pi|-1)} \prod_{C \in \pi, |C| \geq 2} E \left( \prod_{i \in C} \delta X_i \right) \quad (4.46)$$

下面是公式4.46中出现的  $\pi$ ,  $C$ ,  $|\pi|$  和  $|C|$  的意义:

- 假设对  $X_1, X_2, \dots, X_n$  这  $n$  个随机变量的进行分组，可以有多种分组方法，这些分组方法组成一个集合  $A$ ， $\pi$  是这个集合中的一个元素，即  $\pi$  是其中一种分组方法， $\pi \in A$ 。第一个对  $\pi$  的求和是遍历所有这些分组方法，即  $\pi$  取遍  $A$  中所有元素，这意味着不同分组方法之间相加。
- 当  $\pi$  取定一个值，即取定一种分组方法后，它可以把  $X_1, X_2, \dots, X_n$  这  $n$  个随机变量分成  $|\pi|$  个小组，此时，所有这些小组组成一个集合  $\pi$ ，而  $C$  又是这个  $\pi$  中的一个元素，因为  $\pi$  是小组的集合，所以  $C$  是其中的一个小组。第一个求积要求  $C$  取遍  $\pi$  的所有这  $|\pi|$  个小组。这意味着当取定一种分组方法后，这种分组方法分成的不同组之间相乘。
- 当取定一种分组方法，并且取定分好的一个小组， $|C|$  是这个小组中随机变量的个数，它必须大于 2，这在分组时就要考虑。 $i$  是  $C$  中的元素，即小组中的随机变量，最后一个求积要遍历这个小组里面所有随机变量。

现在举个例子来说明一下，让我们计算  $c(X_1, X_2, X_3, X_4)$ ，首先由于要求分的每个组里随机变量都不少于 2 个，随机变量  $X_1, X_2, X_3, X_4$  可以有四种分组方法：

$$\begin{aligned} & \{X_1, X_2, X_3, X_4\}; \\ & \{X_1, X_2\}, \{X_3, X_4\}; \\ & \{X_1, X_3\}, \{X_2, X_4\}; \\ & \{X_1, X_4\}, \{X_2, X_3\}. \end{aligned}$$

这里  $A$  是这四种分组方法的集合， $\pi$  是其中的元素，可以是这四种分组方法中的任意一种，第一个求和要对这四种分组方法求和，以  $\pi$  取第二种分组方法为例，此时  $\pi = \{\{X_1, X_2\}, \{X_3, X_4\}\}$ ，此时  $|\pi|=2$ ， $c$  可以取  $\{X_1, X_2\}$  或  $\{X_3, X_4\}$ ，这里第一个求积是对这两组随机变量  $\{X_1, X_2\}$  和  $\{X_3, X_4\}$  进行。再来看最后一个求积，以其中的一组  $\{X_3, X_4\}$  为例求积是对这组随机变量里面的所有元素即  $X_3, X_4$  进行。

因此，综合上面的讨论利用公式 4.46，混合累积量  $c(X_1, X_2, X_3, X_4)$  和混合中心矩之间的关系可以写为：

$$\begin{aligned} c(X_1, X_2, X_3, X_4) &= E(\delta X_1 \delta X_2 \delta X_3 \delta X_4) - E(\delta X_1 \delta X_2) E(\delta X_3 \delta X_4) \\ &\quad - E(\delta X_1 \delta X_3) E(\delta X_2 \delta X_4) - E(\delta X_1 \delta X_4) E(\delta X_2 \delta X_3) \end{aligned} \quad (4.47)$$

同样，更为简单的三阶混合阶乘累积量  $c(X_1, X_2, X_3)$  可以写为：

$$\begin{aligned} c(X_1, X_2, X_3) &= E(\delta X_1 \delta X_2 \delta X_3) \\ &= E((X_1 - \langle X_1 \rangle)(X_2 - \langle X_2 \rangle)(X_3 - \langle X_3 \rangle)) \\ &= \langle X_1 X_2 X_3 \rangle - \langle X_1 X_2 \rangle \langle X_3 \rangle - \langle X_1 X_3 \rangle \langle X_2 \rangle \\ &\quad - \langle X_2 X_3 \rangle \langle X_1 \rangle + 2 \langle X_1 \rangle \langle X_2 \rangle \langle X_3 \rangle \end{aligned} \quad (4.48)$$

在方程4.48中，最后一个等号把中心矩转换为矩。当  $X_1 = X_2$  时，方程4.48就变成：

$$\begin{aligned} c(X_1, X_1, X_3) &= E((\delta X_1)^2 \delta X_3) \\ &= \langle X_1^2 X_3 \rangle - \langle X_1^2 \rangle \langle X_3 \rangle - 2 \langle X_1 X_3 \rangle \langle X_1 \rangle \\ &\quad + 2 \langle X_1 \rangle^2 \langle X_3 \rangle \end{aligned} \quad (4.49)$$

因此我们可以使用方程4.49来计算  $c(q_{(1,1)}^2, q_{(2,2)})$ ，只需要在方程中令  $q_{(1,1)} = X_1$  并且  $q_{(2,2)} = X_3$ ，我们可以得到：

$$\begin{aligned} c(q_{(1,1)}^2, q_{(2,2)}) &= E((\delta q_{(1,1)})^2 \delta q_{(2,2)}) \\ &= \langle q_{(1,1)}^2 q_{(2,2)} \rangle - \langle q_{(1,1)}^2 \rangle \langle q_{(2,2)} \rangle \\ &\quad - 2 \langle q_{(1,1)} q_{(2,2)} \rangle \langle q_{(1,1)} \rangle + 2 \langle q_{(1,1)} \rangle^2 \langle q_{(2,2)} \rangle \end{aligned} \quad (4.50)$$

通过以上几节的讨论，可以知道如何计算相对论重离子碰撞中产生（探测器效率修正后）的净守恒荷的各阶累积量，当然，这里主要讨论了前四阶累积量。当我们想要计算未修正（即探测器探测到）的净守恒荷的累积量时，我们只需要将  $p_i$  设置为 1，当然如果不考虑探测器效率的问题各阶累积量的计算可以非常简单地直接算出来，这里所说的把所有径迹的效率都设置为 1 的方法可以与之做交叉检验，至少可以在一定程度上检验程序的对错。我们在分析中计算的守恒荷有净-Lambda 数、净-Kaon 数和净-(Lambda+Kaon) 数。

#### 4.4.4 K 介子和 $\Lambda$ 粒子的探测效率

我们使用 TPC 和 TOF 来鉴别 K 介子，因此在计算累积量时需要考虑 TPC 和 TOF 的探测效率。在 STAR 实验中，TPC 的效率是通过将蒙特卡罗 (MC) 径迹嵌入 GEANT 探测器模拟来计算 [63]，这种方法是在真实事例中嵌入蒙特卡罗径迹来估计 TPC 径迹探测的效率 [64]，即根据一个事例中真实嵌入的 MC 径迹和重建出来的 MC 径迹来估计。对不同的粒子探测器的探测效率不同，对 K 介子，TPC 效率估计的流程如下：

- 首先，我们要筛选出真实嵌入的  $K^+$ 、 $K^-$  MC 径迹和重建出来的  $K^+$ 、 $K^-$  MC 径迹，使用和表4.1相同的事例筛选条件还有和表4.2相同的径迹筛选条件，这些筛选条件应该和分析所用的筛选条件相同。
- 然后，我们分别将重建的 K 介子 MC 径迹的 pT 分布和真实嵌入的 K 介子 MC 径迹的 pT 分布填充到两个直方图中。
- 最后，我们把这两个直方图相除，从而得到 TPC 对 K 介子的探测效率。

TPC 对 K 介子的探测效率的计算公式可以表示为:

$$\varepsilon = N_{\text{重建的蒙特卡罗 K 介子径迹}} / N_{\text{嵌入的蒙特卡罗 K 介子径迹}} \quad (4.51)$$

在 Au+Au 27 GeV 碰撞能量下, TPC 对  $K^-$  和  $K^+$  的探测效率随  $p_T$  的依赖关系如图4.14和图4.15所示, 不同的颜色线代表不同的中心度。K 介子的探测效率可能取决于许多因素, 如横向动量 ( $p_T$ )、碰撞中心度等, 因此在进行效率修正时不同中心度分别使用不同的效率。

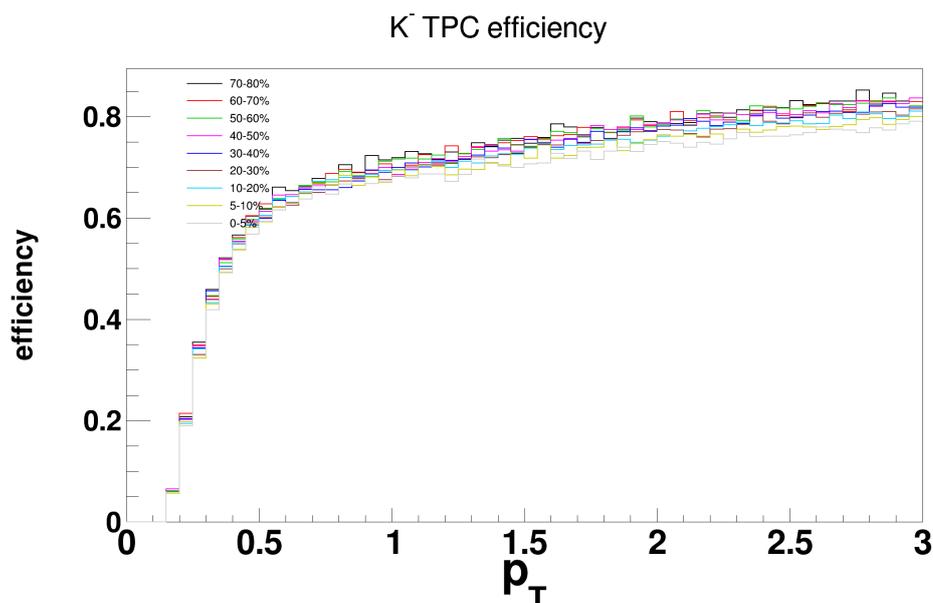


图 4.14: Au+Au 27 GeV 碰撞能量下, TPC 对  $K^-$  的探测效率随  $p_T$  的变化关系, 不同的颜色线代表不同的中心度。

在鉴别 K 介子时用到了 TOF, 因此在计算累积量时还需要考虑 TOF 对 K 介子的探测效率。与 TPC 效率不同, TOF 探测效率是根据实验数据计算的。TOF 效率估算程序流程如下:

- 第一步, 使用与表4.1相同的事例筛选条件, 并且使用与表4.2相同的径迹筛选条件, 这些筛选条件与我们分析中使用的相同。然后填充  $p_T$  分布的直方图, 获得 TPC 中 K 介子径迹的  $p_T$  分布。
- 第二步, 使用第一步中的事例筛选条件和径迹筛选条件, 筛选出 TOF 探测到的 K 介子的径迹。然后填充  $p_T$  分布的直方图, 获得 TOF 探测到的 K 介子径迹的  $p_T$  分布。
- 最后, 我们用第二步得到的直方图除以第一步得到的直方图, 就可以得到  $p_T$  依赖的 TOF 的探测效率。

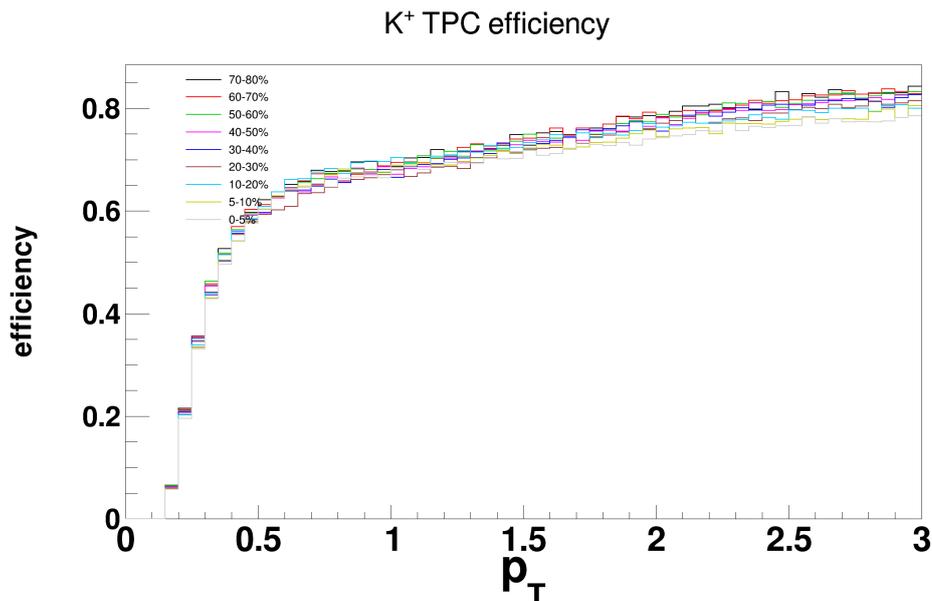


图 4.15: Au+Au 27 GeV 碰撞能量下, TPC 对  $K^+$  的探测效率随  $p_T$  的变化关系, 不同的颜色线代表不同的中心度。

TOF 对 K 介子探测效率的计算公式可以表示为 [65]:

$$\varepsilon = N_{\text{TOF 探测到的 K 介子径迹数}} / N_{\text{TPC 探测到的 K 介子径迹数}} \quad (4.52)$$

在 Au+Au 27 GeV 能量下 TOF 对  $K^-$  和  $K^+$  的探测效率随的  $p_T$  的变化关系如图 4.16 和图 4.17 所示。不同的颜色线代表不同的中心度。

在我们的分析中, 我们同时使用 TPC 和 TOF 两个探测器来探测并鉴别粒子, 因此需要将 TPC 和 TOF 的效率相乘, 以获得它们总的探测效率 [58]。

在 Au+Au 27 GeV 下, TPC 与 TOF 对  $K^-$  和  $K^+$  总探测效率的  $p_T$  依赖关系如图 4.18 和图 4.19 所示。不同的颜色线代表不同的中心度。

当然, 在计算净-(kaon+lambda) 时也需要知道  $\Lambda$  和  $\bar{\Lambda}$  的重建效率。在 STAR 中,  $\Lambda$  与  $\bar{\Lambda}$  的重建效率也是通过在真实碰撞事例中嵌入模拟的  $\Lambda$  与  $\bar{\Lambda}$  粒子来计算的 [66], 它是将在给定的运动学区间内采样得到的模拟蒙特卡罗粒子嵌入到要研究效率的真实事例中 [67]。 $\Lambda$  的重建效率是用重建的 MC  $\Lambda$  数目除以输入的 MC  $\Lambda$  数目 [67]。

$\Lambda$  的重建效率可能取决于许多因素, 如横动量 ( $p_T$ )、快度 ( $y$ )、碰撞中心度等。 $\Lambda$  的重建效率通常随着  $p_T$  的增加而增加。考虑到重建效率的中心度依赖, 我们对不同中心度的  $\Lambda$  的重建效率分别计算。在分析中, 像处理 K 介子那样, 对  $\Lambda$  进行效率修正时不同中心度分别使用不同的效率。

在 Au+Au 27 GeV 碰撞能量下  $\bar{\Lambda}$  和  $\Lambda$  的效率随  $p_T$  的变化关系分别如图 4.20 和 4.21 所示, 不同的颜色线代表不同的中心度。

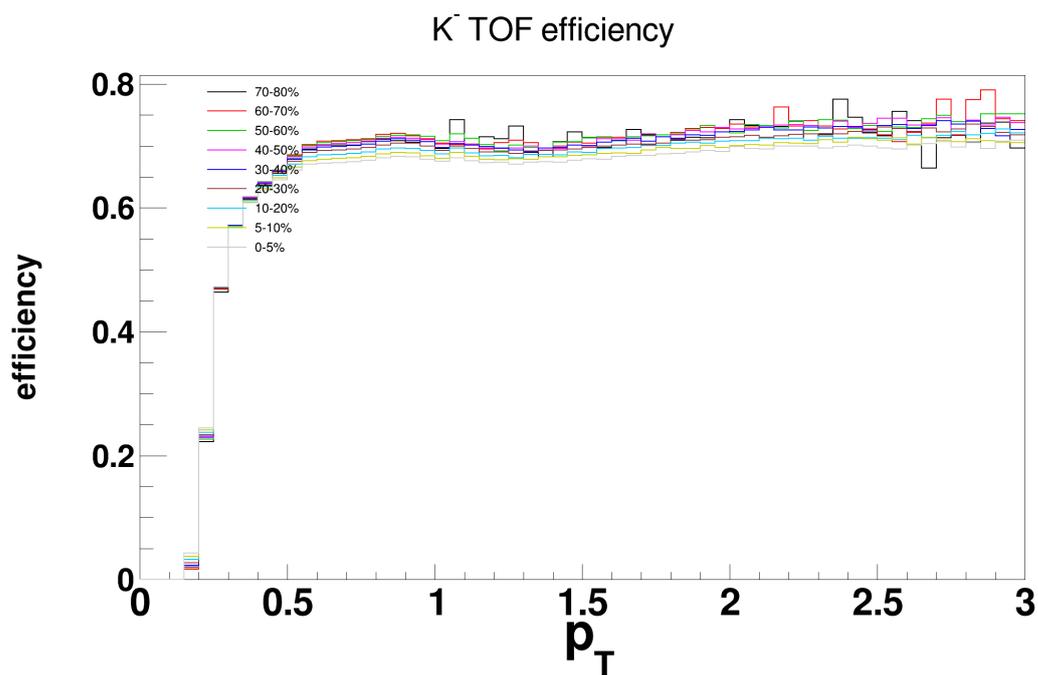


图 4.16: Au+Au 27 GeV 能量下 TOF 对  $K^-$  的探测效率的  $p_T$  依赖关系，不同的颜色线代表不同的中心度。

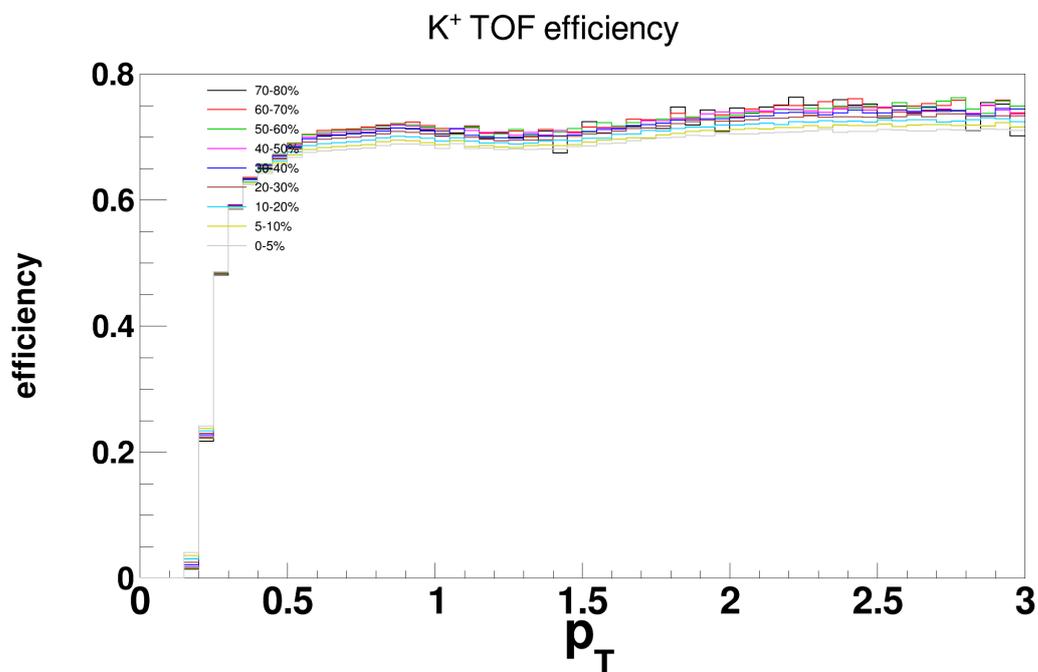


图 4.17: Au+Au 27 GeV 能量下 TOF 对  $K^+$  的探测效率的  $p_T$  依赖关系，不同的颜色线代表不同的中心度。

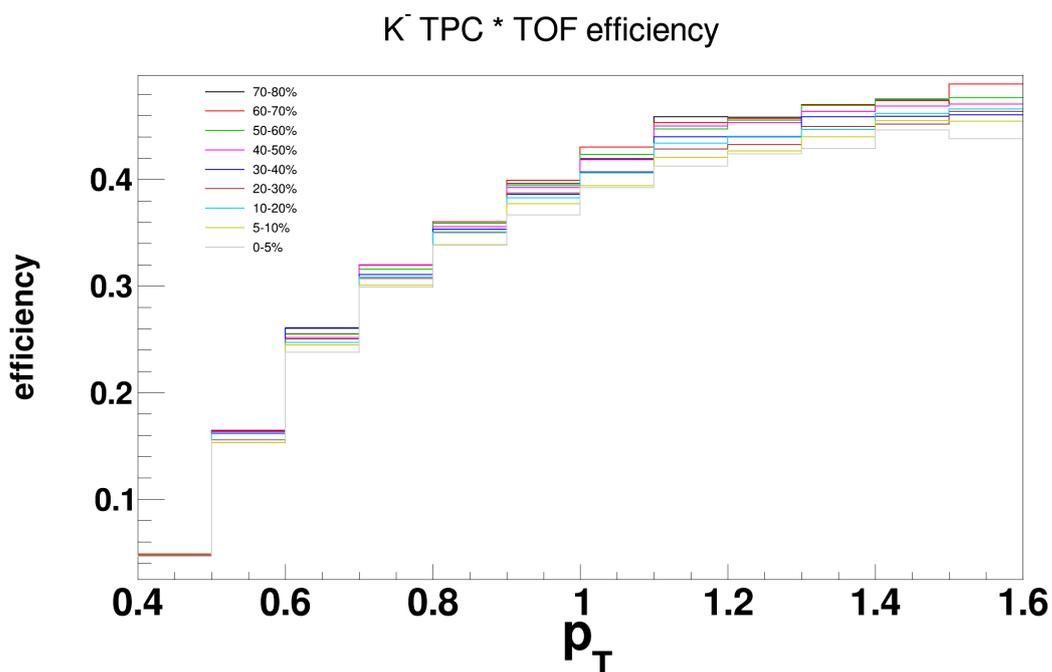


图 4.18: Au+Au 27 GeV 能量下 TPC 与 TOF 对  $K^-$  总探测效率的  $p_T$  依赖关系, 不同的颜色线代表不同的中心度。

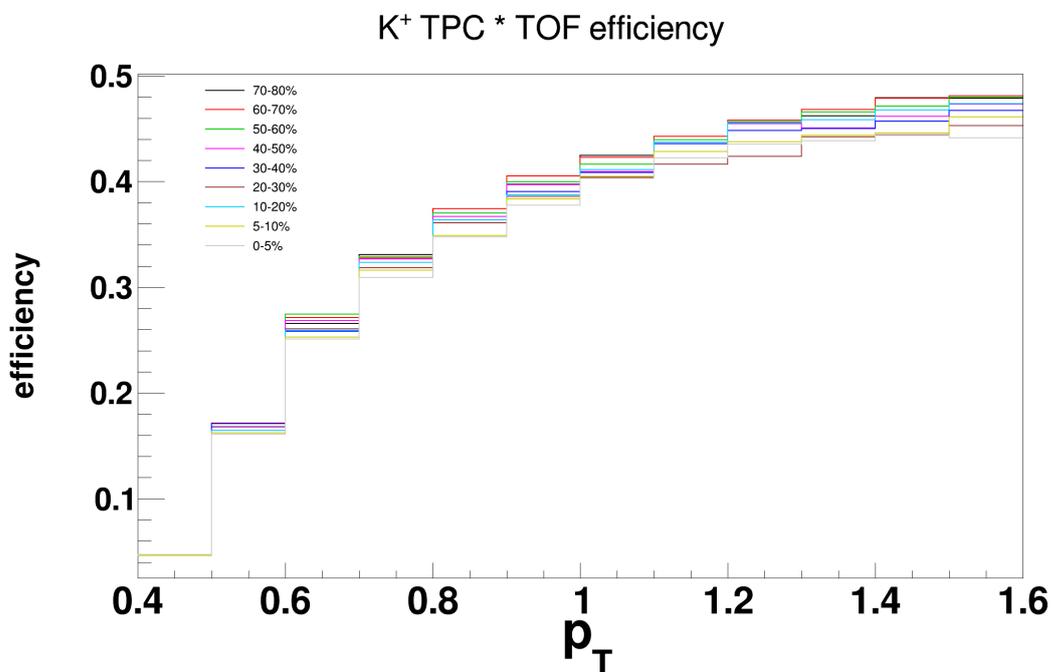


图 4.19: Au+Au 27 GeV 能量下 TPC 与 TOF 对  $K^+$  总探测效率的  $p_T$  依赖关系, 不同的颜色线代表不同的中心度。

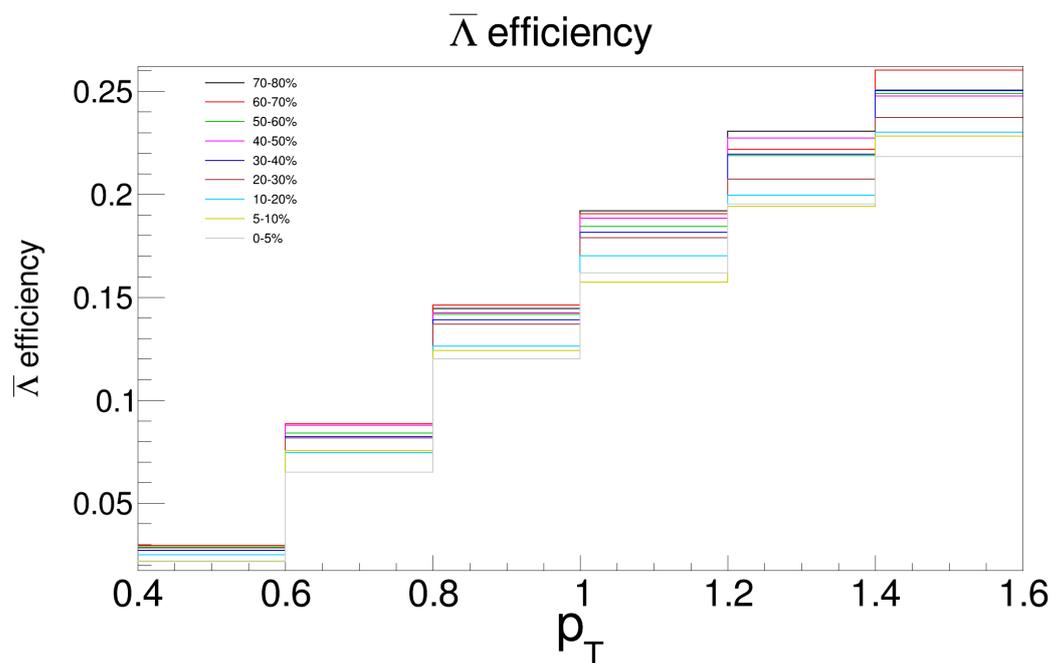


图 4.20: Au+Au 27 GeV 能量下  $\bar{\Lambda}$  效率对  $p_T$  的依赖关系, 不同的颜色线代表不同的中心度。

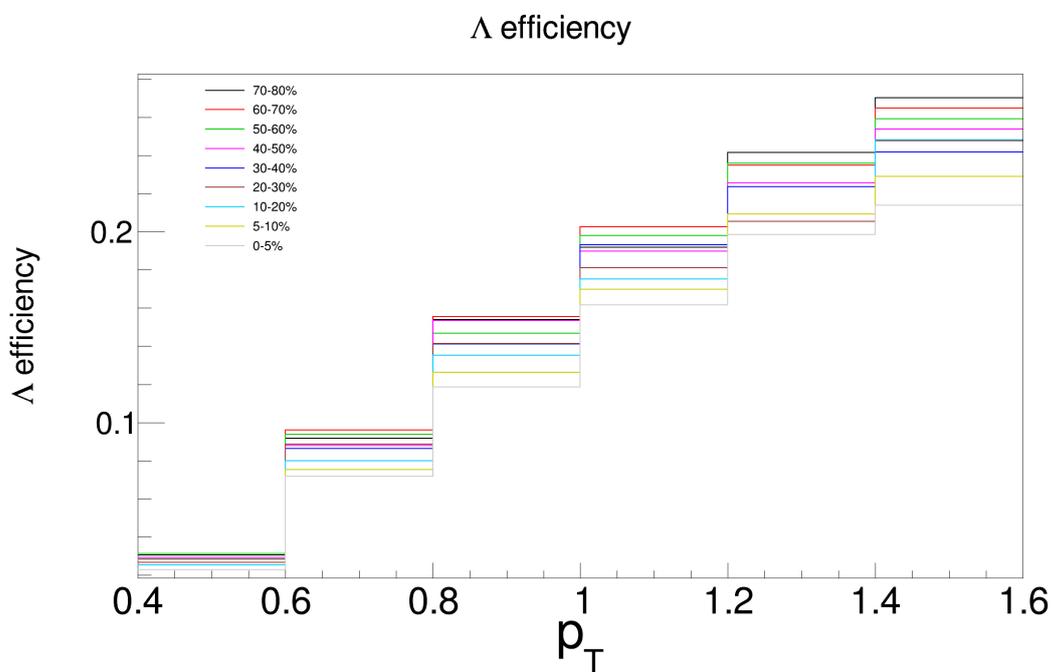


图 4.21: Au+Au 27 GeV 能量下  $\Lambda$  效率对  $p_T$  的依赖关系, 不同的颜色线代表不同的中心度。

## 4.5 中心度宽度修正

### 4.5.1 相对论重离子碰撞中的中心度

在相对论重离子碰撞中，由于重离子是由核子即质子、中子组成的，所以它们不是点粒子，而是具有几何形状。因此，当两个具有几何形状的重离子碰撞时，初始碰撞自然就具有几何形状，不同的碰撞事例几何形状不同。碰撞后，系统会随着时间的推移而演化，直到被探测器探测到为止。我们无法探测到粒子在初始碰撞时的几何形状，只能探测到演化一段时间后的状态。因此要想知道初始碰撞时的几何形状，只能利用探测到的粒子信息来推测。碰撞系统的几何结构可以根据给定接受范围内的所有带电粒子多重数 ( $N_{ch}$ ) 来确定，Glauber 模型 [68-75] 就是一个很好的确定粒子初始碰撞几何形状模型，通过将带电粒子多重数与 Glauber 模型进行比较，可以估计了两个原子核的初始碰撞几何结构 [76-78]。

在相对论核核碰撞中，每个事例碰撞的初始几何形状可以由参与碰撞的核子数 ( $N_{part}$ )、碰撞参数 ( $b$ ) 来表征 [79]。碰撞参数，即穿过两个原子核中心的平行线之间的距离，平行线的方向与两个原子核在原子核质心系中的运动方向相同。当两个原子核碰撞时，它们的碰撞参数 ( $b$ ) 的取值可以从 0 到  $R_1 + R_2$ ，其中  $R_1$  和  $R_2$  分别是两个核的半径，当  $b$  大于  $R_1 + R_2$  时就认为这两个原子核没有发生碰撞，虽然它们之间可能有电磁相互作用等。

在实验中，我们无法准确地测量到碰撞参数  $b$  的大小，只能通过碰撞后探测器探测到的信息，结合 Glauber 模型，用中心度来描述初始碰撞几何结构。当碰撞参数  $b$  等于 0 时，碰撞中心度为 0，称为最中心碰撞；当碰撞参数在 0 到  $R_1 + R_2$  之间时，中心度用百分比表示，百分比越小，就越接近最中心碰撞，当碰撞参数等于  $R_1 + R_2$  时，两个碰撞核几乎不接触。此时，中心度接近 100% [77]。

图4.22是相对论重离子碰撞的示意图。左边是碰撞前，在质心系中两个原子核相向运动，原子核碰撞前呈“薄饼状”，这是因为这些原子核速度极快，接近光速，根据相对论的洛伦兹收缩效应，运动方向的长度是会受到极大的压缩的。原子核是球形的，所以接近光速的时候就成了一个薄饼。图中的  $b$  就是碰撞参数，右边是碰撞之后，在碰撞区域产生了大量的新粒子（彩色的），而没有撞到的区域（灰色粒子）则直接飞过去了。

### 4.5.2 自相关效应及其解决方法

STAR 实验中传统地中心度划分方法是利用  $|\eta| < 0.5$  范围内的带电粒子多重数与 Glauber 模型进行比较，STAR 没有其他更好的探测器系统来完成中心度划分。不幸的是，在分析中，我们需要分析  $|y| < 0.5$  范围内的净 K 介子和净  $\Lambda$ （需要质子和  $\pi$  介

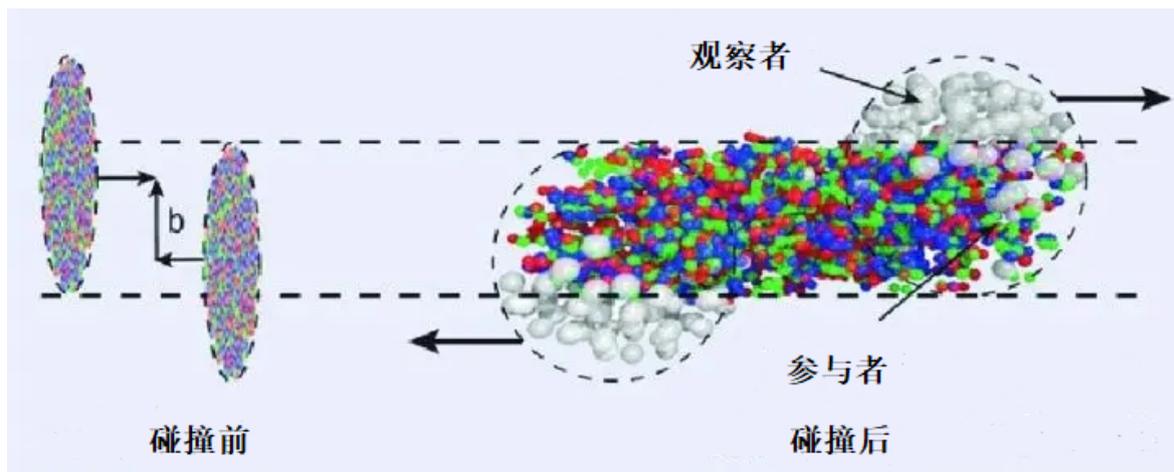


图 4.22: 相对论重离子碰撞示意图。

子来重建) 的累积量。由于在粒子多重数累积量计算和中心度划分中使用了相同的带电粒子, 就会产生自相关效应 [53]。

为了减少自相关效应带来的影响, 我们使用  $0.5 < |\eta| < 1.0$  范围内的带电粒子多重数来定义中心度。传统上, 旧的中心度划分方法是用赝快度区间  $|\eta| < 0.5$  范围内的带电粒子多重数, 这被称为参考多重数 (Reference Multiplicity) 或者简称为“RefMult”, 而我们在这里使用的  $0.5 < |\eta| < 1.0$  范围内的带电粒子多重数, 这被称为参考多重数-2 (Reference Multiplicity-2) 或者简称为“RefMult2”。

在图4.23中画出了定义“RefMult”和“RefMult2”的赝快度范围的示意图。同时在图4.24中画出了金核 + 金核 27 GeV 碰撞能量下 RefMult2 的分布情况。

在表4.6中, 列出了金核 + 金核 27 GeV (Run-18) 碰撞能量下不同中心度与  $\langle N_{part} \rangle$  以及 RefMult2 取值范围之间的对应关系。

图4.25 是金核 + 金核 27 GeV 碰撞能量下三个不同中心度的净-(kaon+lambda) 分布, 红色标号为中心度 0-5%, 黑色标号为中心度 30-40%, 蓝色标号为中心度 70-80%。在该图中, 中心度是根据“RefMult2”定义的, 并且选取的相空间为快度  $|y| < 0.5$  且横动量  $0.4 < p_T < 1.6 \text{ GeV}/c$ 。

从图中可以看出, 当中心度为 0-5% 时, 净-(kaon+lambda) 的分布最宽, 其次是中心度为 30-40%, 当中心度为 70-80% 时分布最窄。我们可以知道, 中心度越小, 即越接近最中心碰撞, 净-(kaon+lambda) 的分布宽度就越宽; 中心度越大, 即越接近边缘碰撞, 净-(kaon+lambda) 的分布宽度就越窄。这是因为当最中心碰撞时, 碰撞产生更多的粒子, 净粒子数可以达到相对较大的值, 因此存在相对较宽的分布。然而, 当中心度变得更大时, 它更接近边缘碰撞, 并且碰撞产生的粒子数量相对较少, 因此净粒子数相对较小, 分布相对较窄。

事实上, 不同阶的累积量都是用来描述随机变量分布的。例如, 一阶累积量表示

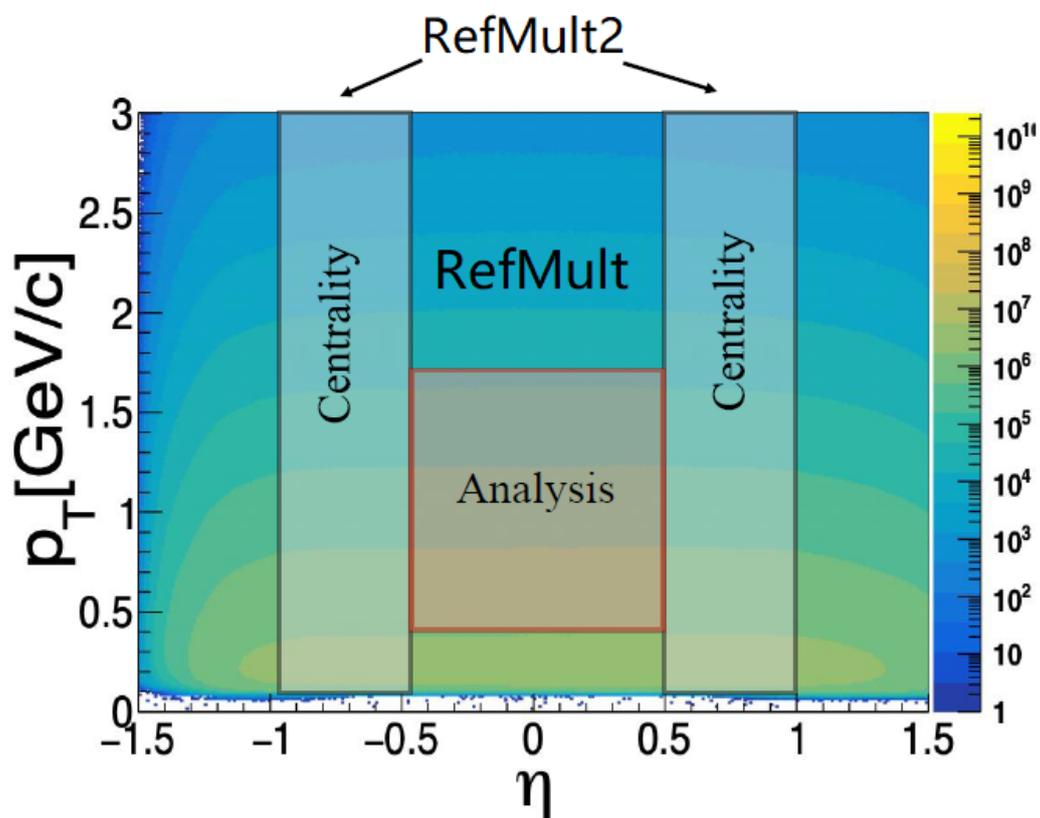


图 4.23: “RefMult” ( $|\eta| < 0.5$ ) 和 “RefMult2” ( $0.5 < |\eta| < 1.0$ ) 的示意图。

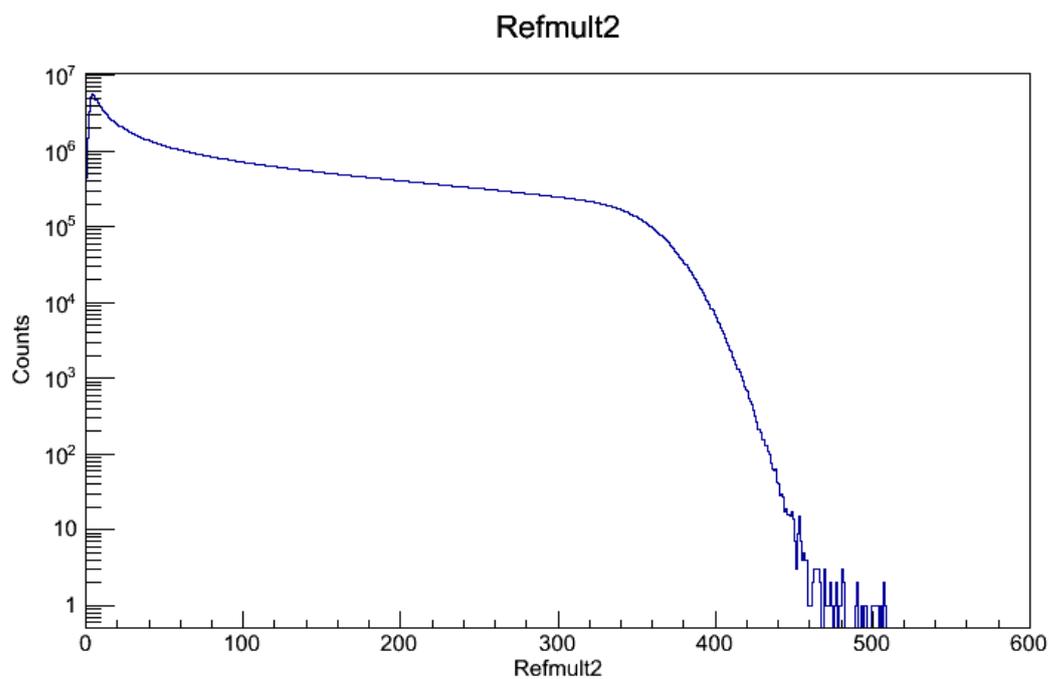


图 4.24: 金核 + 金核 27 GeV 碰撞能量下 RefMult2 的分布情况。

表 4.6: 金核 + 金核 27 GeV (Run-18) 碰撞能量下不同中心度与  $\langle N_{\text{part}} \rangle$  以及 RefMult2 取值范围之间的对应关系。

中心度	$\langle N_{\text{part}} \rangle$	RefMult2 取值范围
0-5%	340.96	$286 < \text{RefMult2}$
5-10%	291.78	$236 < \text{RefMult2} \leq 286$
10-20%	227.42	$160 < \text{RefMult2} \leq 236$
20-30%	167.17	$106 < \text{RefMult2} \leq 160$
30-40%	110.87	$67 < \text{RefMult2} \leq 106$
40-50%	72.93	$40 < \text{RefMult2} \leq 67$
50-60%	45.43	$22 < \text{RefMult2} \leq 40$
60-70%	26.06	$10 < \text{RefMult2} \leq 22$
70-80%	13.43	$4 < \text{RefMult2} \leq 10$

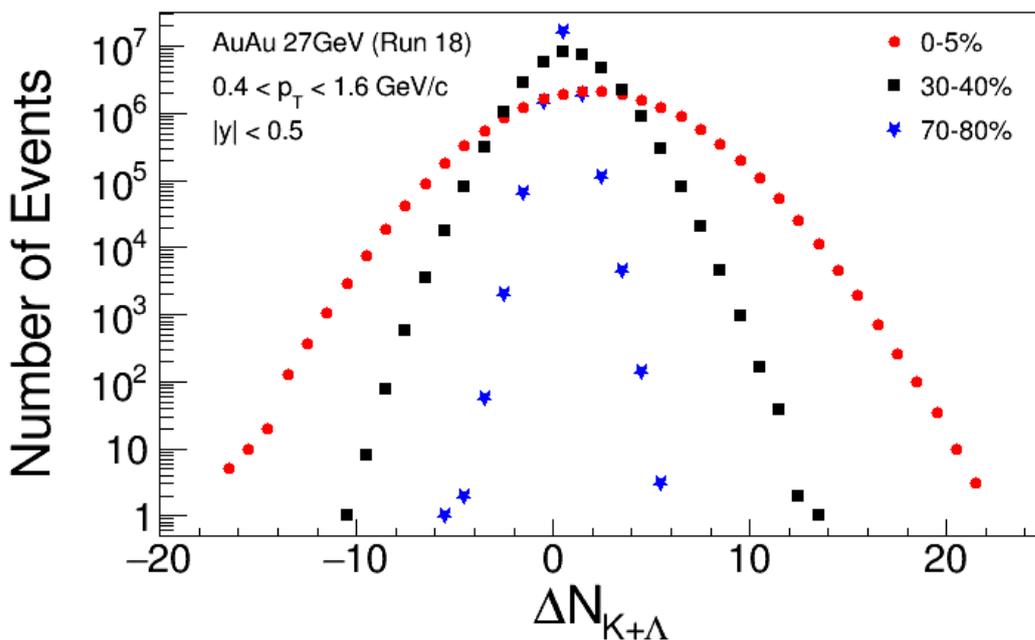


图 4.25: 金核 + 金核 27 GeV 碰撞能量下三个不同中心度的净-(kaon+lambda) 分布, 红色标号为中心度 0-5%, 黑色标号为中心度 30-40%, 蓝色标号为中心度 70-80%。

分布的平均值, 净-(kaon+lambd) 服从高斯分布, 因此峰值的位置表示平均值。不同中心度的峰值在 0 附近, 但并不完全等于 0。二阶累积量表示分布的方差, 它是一组数据的离散度的度量。从图4.25中可以看出, 当中心度为 0-5% 时, 净-(kaon+lambd) 分布的离散程度最大, 因此其  $C_2$  最大, 其次是中心度为 30-40% 中心度为 70-80% 时离散程度最小。

### 4.5.3 中心度宽度效应及修正

在上一节介绍了我们使用 RefMult2 来确定中心度, 把中心度划分为 0-5%, 5-10%, 10-20%, 20-30%, 30-40%, 40-50%, 50-60%, 60-70% 和 70-80%。可以看出即使是同一个中心度, 不同的碰撞事例初始几何可能也并不相同, 这是因为每个中心度都包含相对较宽的 RefMult2 范围, 如表4.6所示。而在这个范围内, 碰撞参数  $b$  并不相同。每个中心度对应如此宽的 RefMult2 区间会导致额外的背景波动, 这就是所谓的中心度宽度效应 (Centrality Bin Width Effect), 缩写为 CBWE[80-82]。在计算累积量时, 这是由于把不同初始碰撞几何的事例划归为同一中心度而人为引起的效应, 应该想办法对其修正。

很自然地会想到, 我们利用 RefMult2 来区分初始碰撞几何的不同, 从而划分中心度, 而 RefMult2 可以取不同的整数, 每个 RefMult2 的值就对应相应的碰撞几何, 我们可以直接取单个的 RefMult2 值而不是区间, 来更精确地区分不同的碰撞几何。

因此, 为了抑制由于每个中心度对应过宽的 RefMult2 区间而导致的中心度宽度效应, 我们首先计算单个 RefMult2 区间的累积量的值。但是为了更好的统计效果, 我们把每个中心度对应的 RefMult2 区间 (如表4.6所示) 合并。合并的方法是以事例数为权重, 计算在各个中心度区间的累积量的加权平均值, 以获得累积量的最终结果。其计算过程如公式4.53所示 [83]:

$$C = \frac{\sum_{i=N_1}^{N_2} n_i C_i}{\sum_{i=N_1}^{N_2} n_i} \quad (4.53)$$

其中,  $C$  代表某个中心度的累积量, 可以是一阶累积量、二阶累积量等;  $C_i$  代表 RefMult2 等于  $i$  时的累积量;  $n_i$  代表 RefMult2 等于  $i$  时的事例数;  $i$  的取值范围是每个中心度对应的 RefMult2 的区间, 金核 + 金核 27 GeV (Run-18) 碰撞能量下如表4.6所列,  $N_1$  和  $N_2$  代表每个中心度对应的 RefMult2 的下限和上限。所以  $\sum_{i=N_1}^{N_2} n_i$  是给定中心度中总的事例数。因此, 公式4.53的意义是计算在给定中心度内包含的每个 RefMult2 对应的累积量  $C$  的加权平均值, 其权重是相应 RefMult2 的事例数。

这种消除中心度宽度效应的技术称为中心度宽度修正 (centrality bin width correction) 缩写为 CBWC[84-91]。

图4.26、4.27和4.28分别画出了金核 + 金核 27 Gev (Run-18) 碰撞能量下净-kaon、净-lambda 和净-(kaon+lambda) 的二阶累积量作为 RefMult2 的函数。蓝色标号是每个 RefMult2 对应的 C2 的值，红色标号是每个中心度的 C2 的加权平均值。每个中心度包含许多 RefMult2，红色竖直垂直线是每个中心度对应的范围。

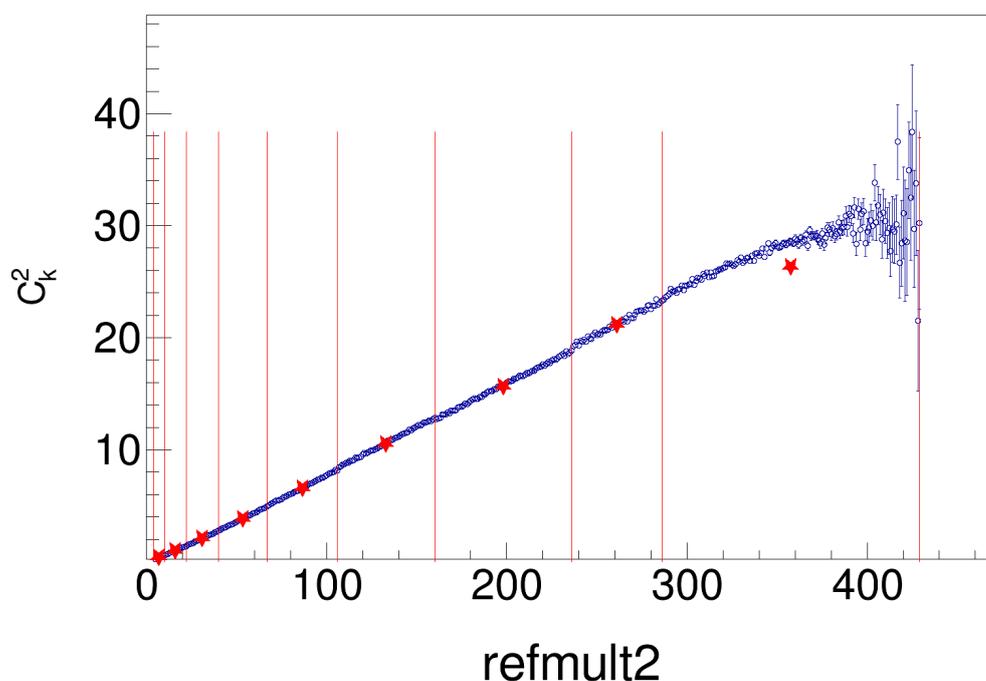


图 4.26: 金核 + 金核 27 Gev (Run-18) 碰撞能量下净-kaon 的二阶累积量作为 RefMult2 的函数。蓝色标号是每个 RefMult2 对应的 C2 的值，红色标号是每个中心度的 C2 的加权平均值。每个中心度包含许多 RefMult2，红色竖直垂直线是每个中心度对应的范围。

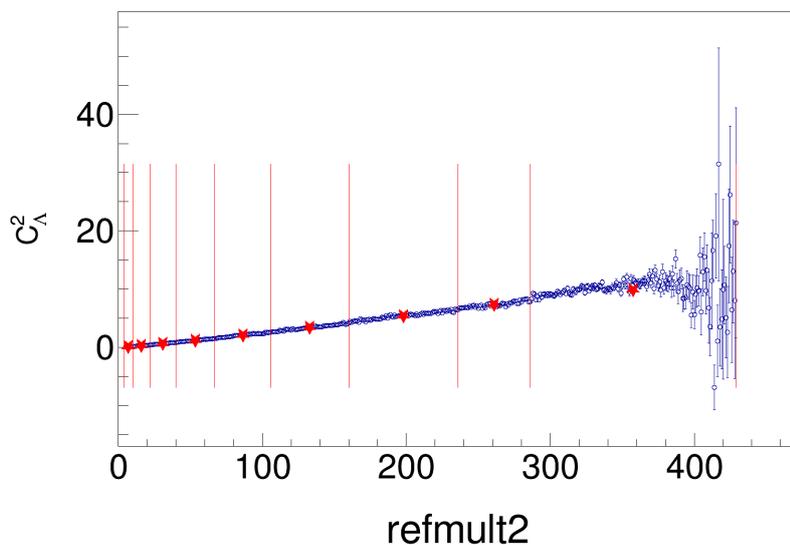


图 4.27: 金核 + 金核 27 Gev (Run-18) 碰撞能量下净-lambda 的二阶累积量作为 RefMult2 的函数。蓝色标号是每个 RefMult2 对应的  $C_2$  的值, 红色标号是每个中心度的  $C_2$  的加权平均值。每个中心度包含许多 RefMult2, 红色竖直垂直线是每个中心度对应的范围。

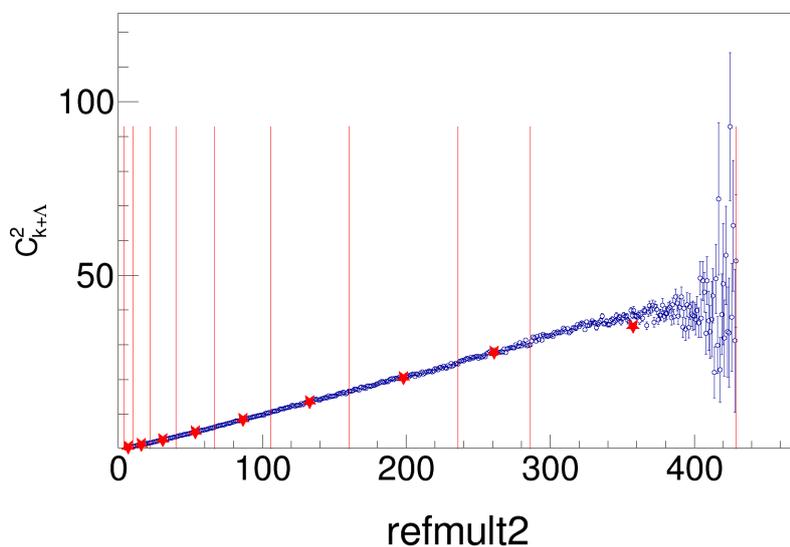


图 4.28: 金核 + 金核 27 Gev (Run-18) 碰撞能量下净-(kaon+lambda) 的二阶累积量作为 RefMult2 的函数。蓝色标号是每个 RefMult2 对应的  $C_2$  的值, 红色标号是每个中心度的  $C_2$  的加权平均值。每个中心度包含许多 RefMult2, 红色竖直垂直线是每个中心度对应的范围。

## 第五章 用 UrQMD 模型计算高阶累积量

UrQMD(ultrarelativistic quantum molecular dynamics: 超相对论量子分子动力学)模型是一种微观输运模型 [92]。在这个时空演化模型中, 包括了强子之间的传播、再散射以及弦激发, 但没有实现介质修正效应。UrQMD 模型可以用来模拟从 SIS 到 RHIC 能区的相对论重离子碰撞。因此, 该模型可以作为重离子碰撞中各种可观测量的基线 [93, 93]。

在本章中我们用 UrQMD 模型模拟了碰撞能量为 7.7、11.5、19.6、27、39、62.4 和 200 GeV 的金核 + 金核碰撞, 并与 STAR 的实验数据做了比较。在 UrQMD 模型的计算中, 我们和 STAR 实验一样使用带电粒子多重数分布来进行中心度划分, 净-Kaon、净-Lambda 和净-(Kaon+Lambda) 多重数分布的累积量是在  $0.4 < p_T < 1.6 \text{ GeV}/c$  且快度  $|y| < 0.5$  的相空间中计算的。

图5.1是不同能量下 UrQMD 模型计算出来的净-Kaon(方形)、净-Lambda(圆形) 以及净-(Kaon+Lambda)(三角形) 的累积量, 竖线表示统计误差。图中模拟的是金核 + 金核碰撞, 从左到右不同的面板表示不同的能量, 分别是 7.7、11.5、19.6、27、39、62.4 和 200 GeV。

这里需要注意一下, 在本章中我们定义净-K 为  $N_{K^+} - N_{K^-}$ 、净- $\Lambda$  为  $N_{\Lambda} - N_{\bar{\Lambda}}$ 、净-( $\Lambda + K$ ) 为  $(N_{K^+} + N_{\bar{\Lambda}}) - (N_{K^-} + N_{\Lambda})$ 。这里与分析中稍微有点不同, 唯一的不同点在于这里定义净- $\Lambda$  为  $N_{\Lambda} - N_{\bar{\Lambda}}$  而分析中定义净- $\Lambda$  为  $N_{\bar{\Lambda}} - N_{\Lambda}$ , 这两种定义得出的结果可以相互转换, 这里这样定义是为了和 STAR 已发表的数据相比较。从图中可以看出在较低能量时, 净-( $\Lambda + K$ ) 的平均值 ( $C_1$ ) 为负的, 而在较高能量时净-( $\Lambda + K$ ) 的平均值 ( $C_1$ ) 变为正的。我们可以这样理解这一趋势, 在较低的碰撞能量下, 由于核阻止效应有较高的重子沉积, 产生较多的重子, Lambda 粒子是最轻的奇异粒子, Lambda 支配净-( $\Lambda + K$ ), 并导致其为负值。净-( $\Lambda + K$ ) 为负值的趋势随着碰撞能量的增加而减小, 随着能量变高粒子反粒子的产额变得相近。这意味着在较低的碰撞能量下比在最高的碰撞能量下观察到更多的负净奇异数 (更多的 s 夸克)。

图5.2是在相同的接受度范围内不同能量下 UrQMD 模型计算出来的净-Kaon(方形)、净-Lambda(圆形) 以及净-(Kaon+Lambda)(三角形) 的累积量的比值, 竖线表示统计误差。从图中可以看出所有能量下的净-Kaon 和净-Lambda 的  $C_1/C_2$  在所有的中心度都是正的。相反, 在低能量时净-(Kaon+Lambda) 的  $C_1/C_2$  是负的, 直到较高能量时其值才为正值。 $C_3/C_2$  也和  $C_1/C_2$  有类似的趋势。由于  $C_2$  总是正值, 因此  $C_1$  和  $C_3$  的正负控制着他们比值的正负。 $C_4/C_2$  在所有能量下净-Kaon、净-Lambda 和净-(Kaon+Lambda) 的值几乎是相同的, 它们保持在 1 附近。

图5.3是中心度为 0-5% 时, 净-Kaon 的  $M/\sigma^2 (C_1/C_2)$  (左面板) 和  $S\sigma (C_3/C_2)$  (右

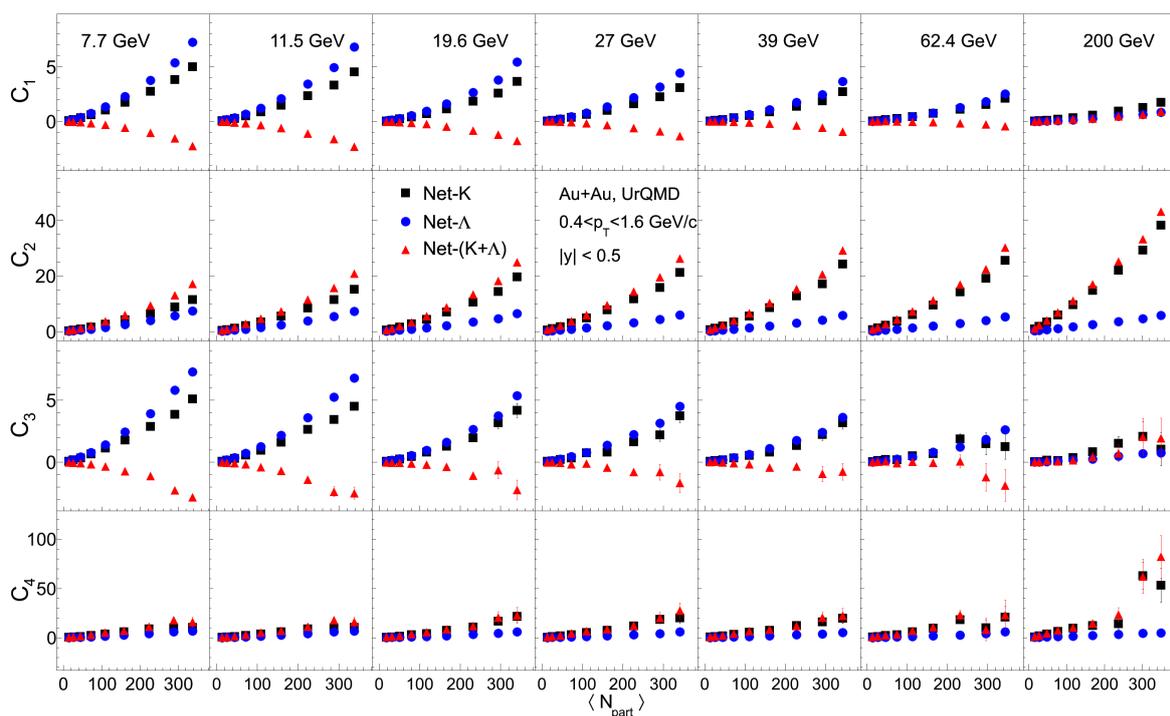


图 5.1: 在相同的接受度范围内不同能量下 UrQMD 模型计算出来的净-Kaon(方形)、净-Lambda(圆形) 以及净-(Kaon+Lambda)(三角形) 的累积量, 竖线表示统计误差。

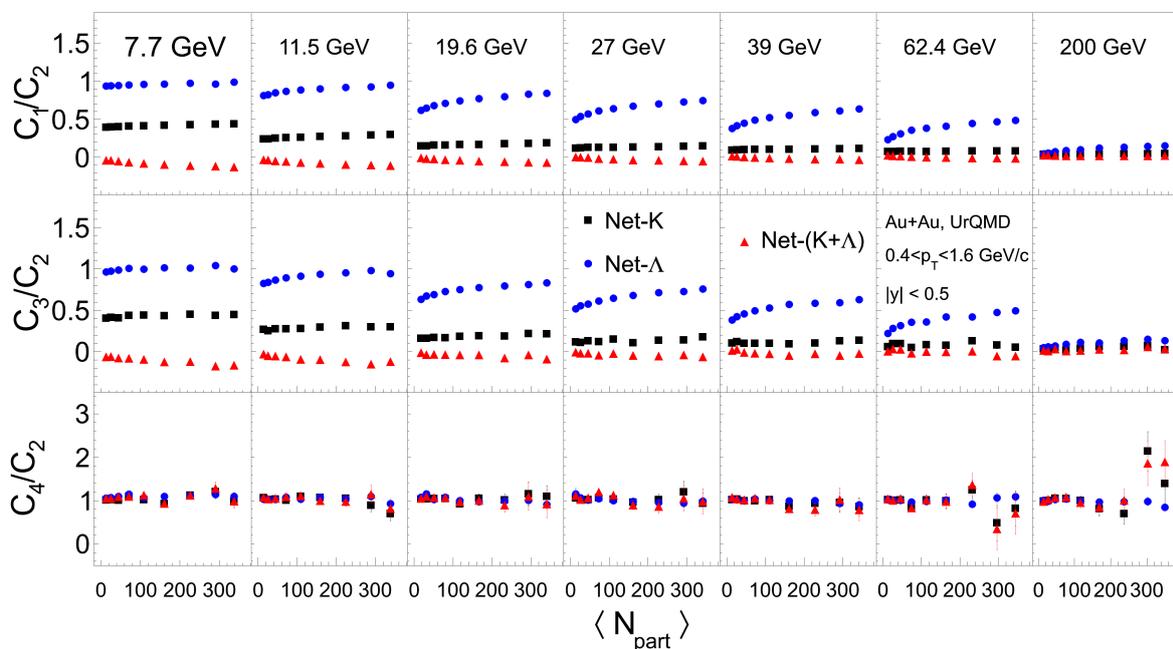


图 5.2: 在相同的接受度范围内不同能量下 UrQMD 模型计算出来的净-Kaon(方形)、净-Lambda(圆形) 以及净-(Kaon+Lambda)(三角形) 的累积量的比值, 竖线表示统计误差。

面板) 的能量依赖关系。圆形和三角形分别表示 STAR 数据和 UrQMD 模型计算的结果。从图中可以看出, 对 Kaon 来说,  $M/\sigma^2$  随能量的增加而降低, 这个结果我们可以结合 5.1 来理解, 可以看出 0-5% 中心度的  $C_1$  随着能量的增加而降低, 而且  $C_2$  随着能量的增加而增加, 因此它们的比值必然会随着能量增加而降低。 $S\sigma$  也是随能量的增加而降低, 与  $M/\sigma^2$  类似,  $C_3$  随着能量的增加而降低, 而且  $C_2$  随着能量的增加而增加, 因此它们的比值必然会随着能量增加而降低。对于 Kaon 来说无论是  $M/\sigma^2$  还是  $S\sigma$  UrQMD 模型的计算结果都与实验数据吻合较好 [94]。

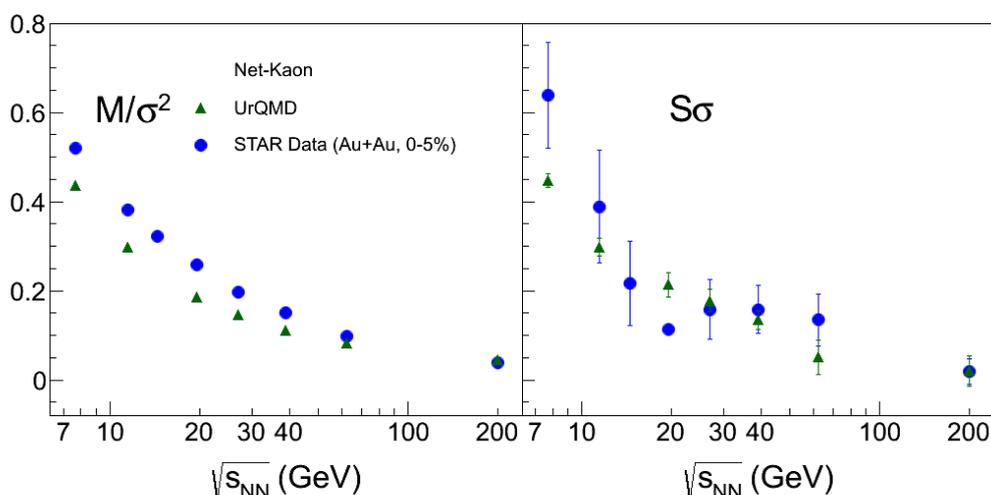


图 5.3: 中心度为 0-5% 时, 净-Kaon 的  $M/\sigma^2$  ( $C_1/C_2$ ) (左面板) 和  $S\sigma$  ( $C_3/C_2$ ) (右面板) 的能量依赖关系。圆形和三角形分别表示 STAR 数据和 UrQMD 模型计算的结果。

图5.4是中心度为 0-5% 时, 净-Lambda 的  $M/\sigma^2$  ( $C_1/C_2$ ) (左面板) 和  $S\sigma$  ( $C_3/C_2$ ) (右面板) 的能量依赖关系。圆形和三角形分别表示 STAR 数据和 UrQMD 模型计算的结果。从图中可以看出, 对 Lambda 来说,  $M/\sigma^2$  随能量的增加而降低, 这个结果我们可以结合 5.1 来理解, 可以看出 0-5% 中心度的  $C_1$  随着能量的增加而降低, 但是  $C_2$  随着能量的增加而降低, 因为  $C_1$  降低的更为明显, 因此它们的比值会随着能量增加而降低。 $S\sigma$  也是随能量的增加而降低, 与  $M/\sigma^2$  类似,  $C_3$  随着能量的增加而降低,  $C_2$  随着能量的增加而降低, 因为  $C_3$  降低的更为明显, 因此它们的比值会随着能量增加而降低。对于 Lambda 来说  $M/\sigma^2$  和  $S\sigma$  UrQMD 模型的计算结果都与实验数据相差较大, 这主要是由于  $C_2$  的不同引起的。

UrQMD 模型与实验数据的比较表明, 净 Kaon 的  $M/\sigma^2$  和  $S\sigma$  具有可比性, 且与实验数据吻合。但是, 在所有能量下, UrQMD 模型计算出来的净 Lambda 的结果和实验数据计算出来的净 Lambda 的结果之间有明显的差异。这种差异可能是由于 UrQMD 模型中的高质量共振粒子衰变产额与实验数据不一致引起的, 在 UrQMD 模

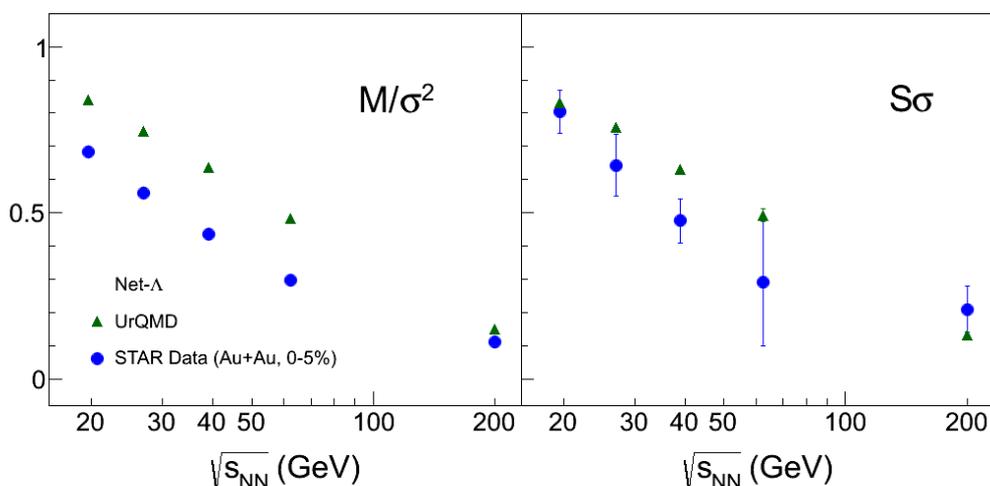


图 5.4: 中心度为 0-5% 时, 净-Kaon 的  $M/\sigma^2$  ( $C_1/C_2$ ) (左面板) 和  $S\sigma$  ( $C_3/C_2$ ) (右面板) 的能量依赖关系。圆形和三角形分别表示 STAR 数据和 UrQMD 模型计算的结果。

型事例中包含了高质量共振态的衰变道。

这里分别比较了由 UrQMD 模型计算出来的净 Kaon 累积量的比值和实验数据计算出来的净 Kaon 累积量的比值, 还有由 UrQMD 模型计算出来的净 Lambda 累积量的比值和实验数据计算出来的净 Lambda 累积量的比值。这里 Kaon 和 Lambda 代表奇异数, 因为它们都包含奇异夸克。我们很自然的会想到如果用 (Kaon+Lambda) 来代表奇异数并比较由 UrQMD 模型计算出来的净 (Kaon+Lambda) 的累积量的比值和实验数据计算出来的净 (Kaon+Lambda) 的累积量的比值是非常有意义的, 因为 (Kaon+Lambda) 比 Kaon 或者 Lambda 更能代表奇异数。目前还没有发表实验数据计算出来的净 (Kaon+Lambda) 的累积量的结果, 因此本论文实验分析部分计算净 (Kaon+Lambda) 高阶累积量具有一定的意义。而本小节的 UrQMD 模型计算的结果可作为净 (Kaon+Lambda) 多重数分布累积量的基线。

通过以上的分析我们可以看出, UrQMD 模型中, 在本文给出的接受度范围内净 (Kaon+Lambda) 的  $C_1/C_2$  和  $C_3/C_2$  在较低碰撞能量时为负值, 在较高碰撞能量时变为正值。在较低的  $s_{NN}$  下, 有限的重子密度有利于超子而不是奇异介子的优势, 从而产生负奇异性。在较低的能量下, 有限的重子密度有利于超子占主导地位而不是奇异介子, 从而产生了这种负的奇异性。这种效应随着碰撞能量的增加而减弱, 随着碰撞能量的增加奇异介子 Kaon 的产额高于 Lambda 超子。相反, 净 Kaon、净 Lambda 和净 (Kaon+Lambda) 的高阶累积量的比值  $C_4/C_2$  之间没有明显的变化。

利用 UrQMD 模型计算净 Kaon、净 Lambda 和净 (Kaon+Lambda) 多重数分布的高阶累积量可以提供在 RHIC 能量下重离子碰撞奇异性的必要信息, 并为实验数

据提供一个基准。将 UrQMD 模型的计算结果与 STAR 的测量结果进行比较非常重要。



## 第六章 净 ( $K+\Lambda$ ) 高阶累积量测量结果与讨论

### 6.1 误差估计

误差估计对任何实验来说都是非常重要的一个步骤，误差是测量结果与被测量的真值之差值。误差可以分为统计误差和系统误差。误差是相对被测量真值而言的，由于实际上并不知道真值，误差也只能是个理想概念，不可能得到它的准确值。

在本章所要估计的误差实际上是指不确定度 (Uncertainty)，不确定度以测量结果本身为研究对象；其含义不是“与真值之差”，而是表示由于随机影响和系统影响的存在而对测量结果不能肯定的程度，可以理解为对观测量进行重复测量这个观测量以一定概率落入的范围。

随机误差是由无法控制的因素造成的，如人眼的分辨能力、仪器的极限精度等，是不可避免的。随机误差也称为统计误差，因为它本质上是随机的，是不可消除的，因此测量对象的真值永远不可知，但它可以通过统计手段在测量中尽可能地被减少。在相同的条件下多次测量同一量时，测量的结果可以用一个随机变量表示，单个地看随机变量具有无规性，但是大量的随机误差呈现一定的统计规律。因而，随机误差的处理可以用概率统计的方法，比如多次测量的平均值的随机误差要比单个测量值的随机误差小。

系统误差在相同的观测条件下会表现出一定的规律性。系统误差与统计误差的区别是，系统误差以相同的方式影响所有测量值，将它们推向同一个方向；而随机误差则随着不同次的测量而变化，有时候向上，有时向下。随机误差主要影响精度，即在同等情况下相同测量的可重复性。系统误差会影响测量的正确度，或者说影响观测值与真实值的接近程度。

图6.1是用打靶类比测量的示意图。用飞镖打靶的目标是让飞镖尽可能地打到靶子的中心，同样对物理量进行测量的目标是让测量值尽可能地接近真值。这里飞镖打到的位置类似于测量值，靶心位置类似于真值。精度反映了被测量的测量值间的符合程度，反映统计误差的情况，精度高代表统计误差小；正确度反映测量结果的数学期望和真值之间的一致程度，反映系统误差的情况，正确度高代表系统误差小。以图6.1b为例，飞镖没有命中靶子中心，而是分布在靶子中心周围，表示统计误差虽然大，但是系统误差小。类似的，6.1c表示虽然精度很高，即所有的箭都击中了相近的位置，击中位置之间没有较大的偏差，但是击中位置的期望值和靶心有不小的偏差，表示统计误差虽然小，但是系统误差大。

下面简单介绍一下概率论与数理统计学，以便更好地理解统计误差。随机试验所有可能结果组成的集合称为试验的样本空间，记为  $\Omega$ ，定义在样本空间的单值实函数

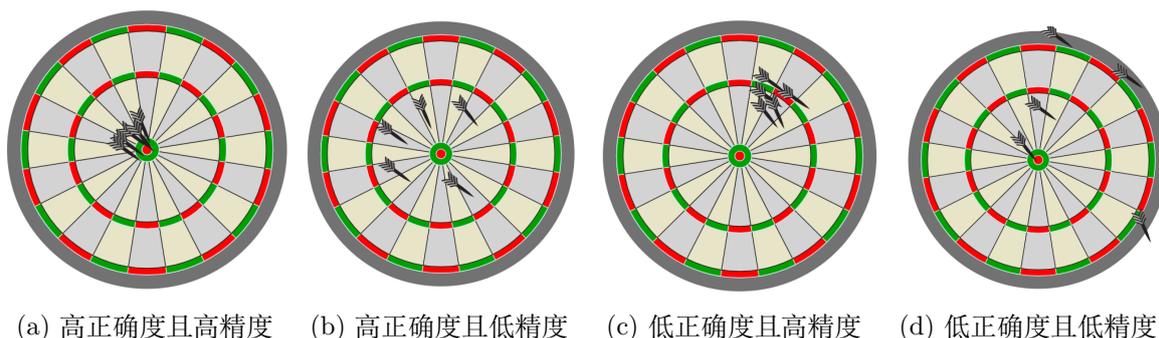


图 6.1: 用打靶类比测量的示意图, 本图片来自网络。

$X = X\{e\}$  称为随机变量 [95]。在统计学中, 把研究对象的全体元素的某项数量指标组成的集合称为总体, 总体中的元素叫做个体。把总体的子集称为样本。总体可以认为是定义在全体研究对象上的实函数, 因此总体可用一个随机变量  $X$  来描述。通常我们并不知道总体的分布情况, 而是通过样本来估计总体的分布。对一个个体  $X_i$ , 在试验之前我们并不知道它的具体值, 其可以取总体中的任何值, 因此  $X_i$  也是一个随机变量。用一个个体很难全面的估计总体的分布情况, 因此我们抽取  $n$  个个体组成一个样本, 则共有  $n$  个随机变量,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  称为样本容量为  $n$  的样本, 它们的观察值  $x_1, x_2, \dots, x_n$  称为样本值。

对一个物理量, 我们并不知道它的真值, 只能通过测量来获得其观测值。每一次测量可以认为是一次试验, 试验结果可以取各种可能的值, 是一个随机变量。做  $n$  次测量可以得到  $n$  个随机变量, 组成一个样本。样本是总体的代表, 我们希望通过样本来估计真值。

样本包含了大量的信息, 我们需要对样本进行处理以更直观的了解它所包含的信息, 这种处理就是构造样本的某种函数。样本不含未知参数的函数称为统计量。统计量作为随机变量的函数因而也是随机变量。样本均值就是一个常用的统计量, 对一个样本容量为  $n$  的样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  其定义为:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (6.1)$$

无穷多个观测值的平均值就是被测物理量的真值,

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (6.2)$$

但任何试验我们都不可能做到无穷多次, 只能进行有限次测量从而得到一个样本并用样本均值作为观测量  $\mu$  的估计量, 并把样本值带入得到估计值。从6.3式我们可以

看到样本均值是总体均值的无偏估计量。

$$E[\bar{X}] = E\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i\right] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[X_i] = E[X] \quad (6.3)$$

当使用样本均值来估计真值时，为了研究这个估计的置信度，我们来看一下样本均值的方差。

$$\begin{aligned} \sigma^2(\bar{X}) &= \text{var}(\bar{X}) = E[(\bar{X} - \mu)^2] = E\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i - \mu\right)^2\right] \\ &= E\left[\frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N X_i\right)^2 - 2\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \mu + \mu^2\right] \\ &= \frac{1}{N^2} E\left[\sum_{i=1}^N X_i^2 + \sum_{j=1, k=1, j \neq k}^N X_j X_k\right] - \mu^2 \\ &= \frac{1}{N} \mu_2 + \frac{N(N-1)}{N^2} \mu^2 - \mu^2 \\ &= \frac{1}{N} \mu_2 - \frac{1}{N} \mu^2 = \frac{1}{N} \text{var}(X) \\ &= \frac{\sigma^2(X)}{N} \end{aligned} \quad (6.4)$$

这里  $\mu$  是总体的期望值， $\mu_2$  是总体的二阶矩。在计算过程中，使用了当两个随机变量彼此独立时，两个随机变量乘积的期望值等于期望值的乘积，并注意  $X_j$  和  $X_k$  ( $j \neq k$ ) 彼此独立，

$$E[X_j X_k] = E[X_j] E[X_k] \quad (6.5)$$

从式6.4中可以看出样本均值的标准差与样本容量的开方  $\sqrt{N}$  成反比，多次测量的平均值比一次测量的值更精确，这就是我们使用样本均值估计真值的原因。当  $N$  无限大时，统计误差将无限小，这与我们所说的无穷多个观测值的平均值是真实值一致。还可以看出，通过增加观测次数可以减小统计误差。

但注意，公式6.4中  $\sigma(X)$  的含义是总体的方差。大多数时候我们根本不知道总体的分布更不可能知道总体的方差。想要根据现有的样本来估计总体方差，为此定义样本方差：

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2 \quad (6.6)$$

这里分母是  $N-1$  而不是  $N$ ，是因为只有这样定义样本方差才是总体方差的无偏估计

量。我们可以计算如下：

$$\begin{aligned}
 E[S^2] &= E\left[\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^N(X_i - \bar{X})^2\right] \\
 &= \frac{1}{N-1}E\left[\sum_{i=1}^N(X_i^2 + \bar{X}^2 - 2X_i\bar{X})\right] \\
 &= \frac{1}{N-1}E\left[\sum_{i=1}^N X_i^2\right] + \frac{1}{N-1}E\left[\sum_{i=1}^N \bar{X}^2\right] - \frac{2}{N-1}E\left[\sum_{i=1}^N X_i\bar{X}\right] \\
 &= \frac{1}{N-1}[N\mu_2 + \mu_2 + (N-1)\mu_1^2 - 2\mu_2 - 2(N-1)\mu_1^2] \\
 &= \frac{1}{N-1}[(N-1)\mu_2 - (N-1)\mu_1^2] \\
 &= \frac{1}{N-1}[(N-1)(\mu_2 - \mu_1^2)] \\
 &= \sigma^2(X)
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

其中使用了

$$E\left[\sum_{i=1}^N \bar{X}^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N X_j\right]^2\right] = \mu_2 + (N-1)\mu_1^2 \tag{6.8}$$

和

$$\begin{aligned}
 E\left[\sum_{i=1}^N X_i\bar{X}\right] &= E\left[\sum_{i=1}^N X_i \left[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N X_j\right]\right] \\
 &= \frac{1}{N}E\left[\sum_{i=1}^N X_i^2\right] + \frac{1}{N}E\left[\sum_{i=1, j=1, i \neq j}^N X_i X_j\right] \\
 &= \mu_2 + (N-1)\mu_1^2
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

同样，对于一个分布的数值特征，如本文所要测量的各阶累积量，由于我们不知道分布的具体表达式，因此也就不能精确地知道分布的累积量等这些数值特征，只能利用测量得到的样本来构造估计量，从而估计出分布的数值特征。由此获得的数值特征观察值会随样本的变化而变化，因此估计量也是一个随机变量。把一个样本观察值带入估计量得到的就是估计值。估计值是用样本计算出来的，因此估计值会有一个不确定度。

在之前的内容中，我们讨论了样本均值并估计了它的误差，但计算其它统计量的误差并不那么容易，大多数统计量的误差估计都很麻烦，比如本论文要测量的高阶样本累积量  $\hat{c}_2$ 、 $\hat{c}_3$ 、 $\hat{c}_4$  和它们的比值。目前已有许多文章讨论过这个问题 [96-98]。这里注意一下，我们使用  $c_2$ 、 $c_3$ 、 $c_4$  表示总体的累积量，用  $\hat{c}_2$ 、 $\hat{c}_3$ 、 $\hat{c}_4$  表示样本累积量。对于本论文要测量的净 (Lambda+Kaon) 多重数分布的累积量  $c_i$ ，我们不可能知道总

体净 (Lambda+Kaon) 多重数的分布情况, 只能通过 STAR 采集的数据样本来构造估计量  $\hat{c}_i$ , 并用估计值来代表真值。为简单起见, 在不至于引起混淆的情况下, 本文也用  $c_i$  代替  $\hat{c}_i$ 。

如果想计算  $\hat{c}_4$  的误差, 最高需要计算到 8 阶中心矩, 而计算的阶数越高所需要的样本容量越大。而且这里还涉及到探测器效率的问题。因此在本文中我们采用另外一种方法来估计统计误差, 即所谓的 Bootstrap 方法。接下来的一节我将介绍这种方法, 并利用 Bootstrap 方法估计本论文测量的高阶累积量的统计误差。

### 6.1.1 用 Bootstrap 方法估计统计误差

假设随机变量  $X$  服从某种分布  $F$ ,  $\theta$  是  $F$  中的参数或者是分布的某种数值特征。当在实验中测量物理量  $\theta$  的值时, 由于测量的随机误差等原因, 我们无法在实验中直接获得被测量的真值, 只能通过多次测量获得一个样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , 再利用样本构造一个样本的函数即估计量  $\hat{\theta}$ , 以此来代替真值。当样本容量趋于无穷, 即做无穷多次测量时, 估计量才能在不考虑系统误差时趋于真值, 显然我们不能做无穷多次测量, 因而估计量会存在统计误差。通过之前的讨论我们知道, 统计误差反应的是测量的精度, 即各测量值之间的离散程度。我们可以使用估计量  $\hat{\theta}$  的标准差  $\sigma_{\hat{\theta}} = \sqrt{D(\hat{\theta})}$  来度量估计的精度。由于很难知道估计量  $\hat{\theta}$  的分布, 有时甚至不知道  $X_i$  的分布, 因此不能直接计算标准差  $\sqrt{D(\hat{\theta})}$ 。

假设我们知道总体服从的分布函数  $F$ , 可以利用分布函数产生  $B$  个样本容量为  $n$  的样本, 估计量在每一个样本中分别记为  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \dots, \hat{\theta}_B$ , 带入样本值就可以计算出估计值。则标准差可以用 6.10 式来估计,

$$\hat{\sigma}_{\hat{\theta}} = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{i=1}^B (\hat{\theta}_i - \bar{\theta})^2} \quad (6.10)$$

其中,  $\bar{\theta} = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \hat{\theta}_i$ , 6.10 式中除以  $(B-1)$  的原因已经在之前讨论过。

但大多数情况我们并不知道总体的分布函数, 否则也不需要用来估计总体的数值特征, 如各阶累积量。因此我们不能利用分布函数产生样本。

但是由格里汶科定理知道, 对任一实数  $x$ , 当  $n$  充分大时, 经验分布函数的任一个观察值  $F_n(x)$  与总体分布函数  $F(x)$  只有微小的差别, 从而可以当作  $F(x)$  使用。设  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  是来自以  $F$  为分布函数的样本值, 因此我们可以将这些样本值带入经验分布函数得到一个观察值  $F_n(x)$ , 以它来代替  $F(x)$ [99]。然后像之前的操作一样, 在  $F_n$  中抽取样本容量为  $n$  的样本, 这个样本就是 Bootstrap 样本。在  $F_n$  中抽样, 就是在样本值为  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的原始样本中每次随机有放回地抽取一个个体, 一直抽

取  $n$  个个体，组成一个新的样本。然后重复抽取  $B$  个这样的样本，以此用公式6.10来估计统计误差。这种估计统计误差的方法就是 Bootstrap 方法 [100-101]。

Bootstrap 方法是一个非常有用的方法，它又称为自助法，其核心思想是，最好严格从手头的样本中得出关于总体特征的结论，而不是对总体做出不切实际的假设。一般来说 Bootstrap 方法需要计算机做大量重复性的计算，因此近些年随着计算机计算能力的增强，Bootstrap 方法得到了更广泛的应用。

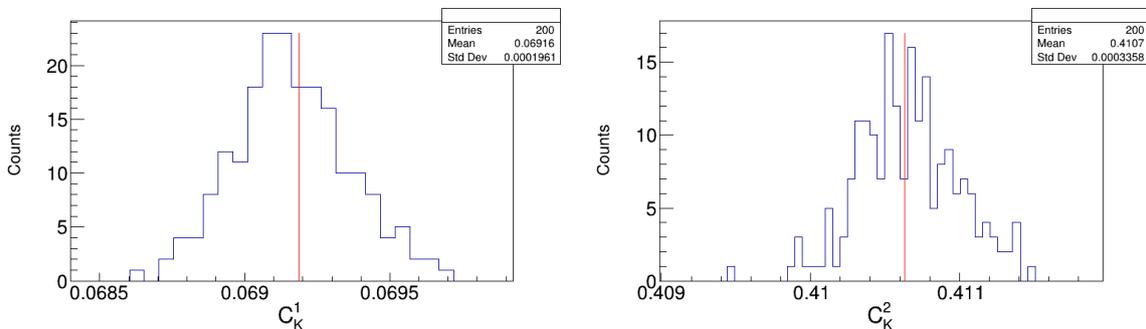
接下来我们就使用以上介绍的 Bootstrap 方法来估计累积量以及累积量的比值的统计误差。

图6.2展示了在金核 + 金核 27 GeV (Run-18) 碰撞能量下，中心度为 70-80% 的 200 个 Bootstrap 样本计算出来的估计量（净 Kaon 累积量及其比值）估计值的分布。蓝色的线是 Bootstrap 样本计算出来的累积量估计值分布的直方图，红色的线是使用原始样本计算出来的累积量的估计值。有了这 200 个估计值就可以按照之前讨论的方法利用公式6.10计算出统计误差，统计误差的结果画在了6.2节中。

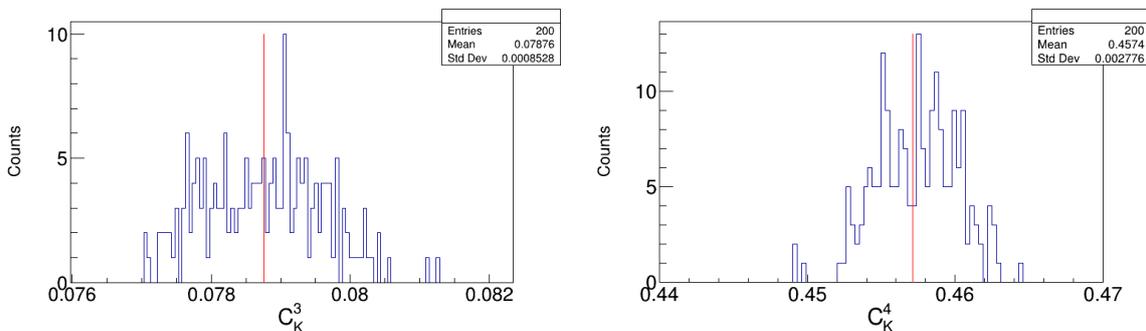
这里选择 200 个 Bootstrap 样本是因为我们分别研究过使用 50 个 Bootstrap 样本、100 个 Bootstrap 样本、200 个 Bootstrap 样本和 300 个 Bootstrap 样本，发现当选 50 个 Bootstrap 样本时得出的结果和 100 个样本相差比较大，100 个样本和 200 个样本已经很接近了，而 200 个 Bootstrap 样本和 300 个 Bootstrap 样本没有明显的差别。同时考虑到使用 Bootstrap 方法需要用到大量的计算资源，为了兼顾准确性和计算的速度我们最终选择了抽取 200 个 Bootstrap 样本。

在得到这 200 个 Bootstrap 样本估计值后，我们可以使用之前讨论的方法利用公式6.10来估算统计误差。用同样的方法估计其它中心度的统计误差。

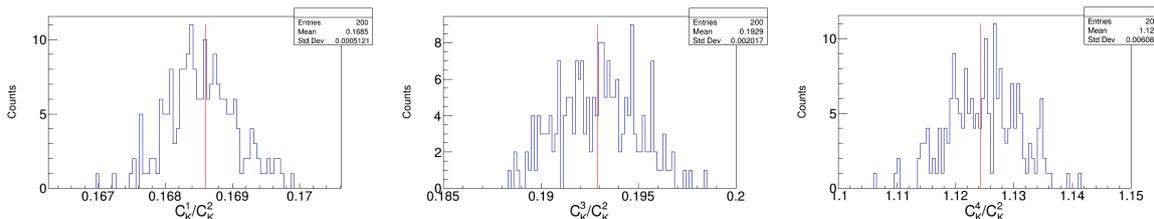
同样，对于净 Lambda 以及净 (Lambda+Kaon) 我们用相同的方法估计统计误差，这里把净 Lambda 和净 (Lambda+Kaon) 中心度为 70-80% 的 200 个 Bootstrap 累积量及其比值的估计值的分布画在了图6.3和图6.4。



(a) 200 个 Bootstrap 样本的净-K 介子数一阶累积量分布。(b) 200 个 Bootstrap 样本的净-K 介子数二阶累积量分布。

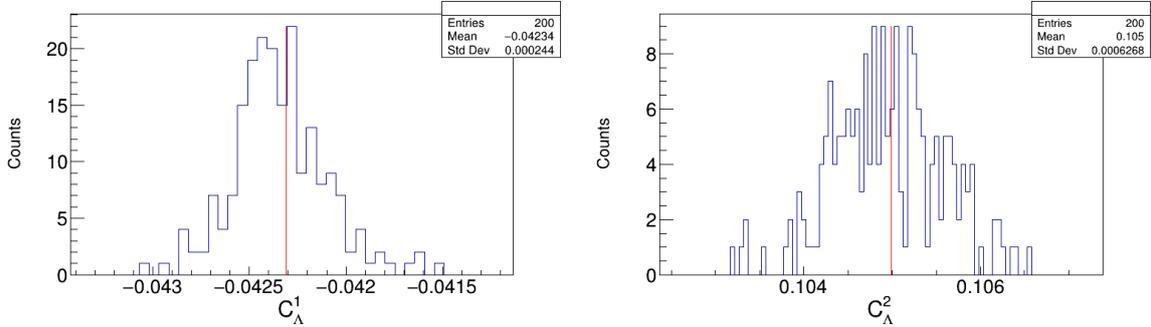


(c) 200 个 Bootstrap 样本的净-K 介子数三阶累积量分布。(d) 200 个 Bootstrap 样本的净-K 介子数四阶累积量分布。

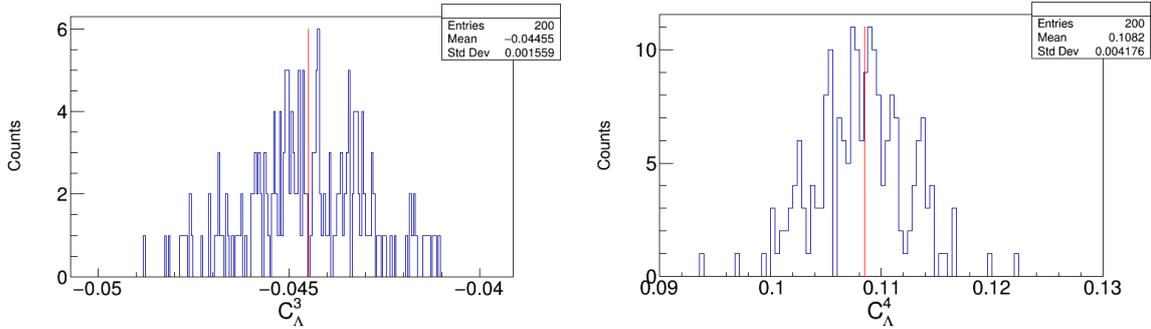


(e) 200 个 Bootstrap 样本的净-K 介子数的  $C_1/C_2$  分布。(f) 200 个 Bootstrap 样本的净-K 介子数的  $C_3/C_2$  分布。(g) 200 个 Bootstrap 样本的净-K 介子数的  $C_4/C_2$  分布。

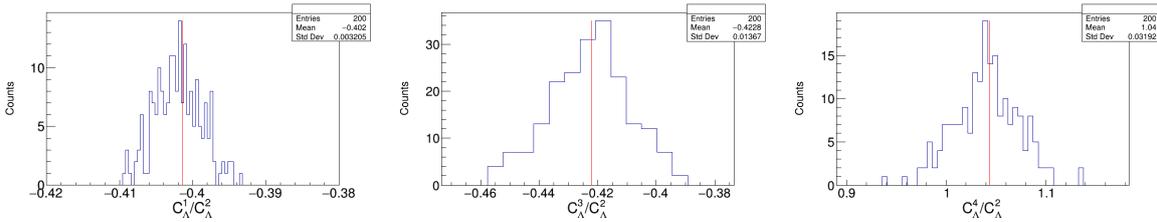
图 6.2: 金核 + 金核 27 GeV (Run-18) 碰撞能量下, 中心度为 70-80% 的 200 个 Bootstrap 样本的净 Kaon 累积量和累积量的比值的分布。蓝色的线是 Bootstrap 样本计算出来的累积量估计值分布的直方图, 红色的线是使用原始样本计算出来的累积量的估计值。



(a) 200 个 Bootstrap 样本的净-Lambda 数一阶累积量分布。 (b) 200 个 Bootstrap 样本的净-Lambda 数二阶累积量分布。

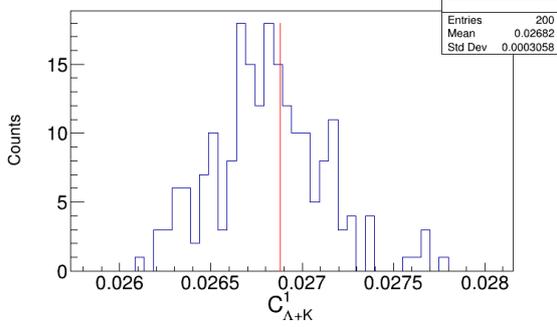


(c) 200 个 Bootstrap 样本的净-Lambda 数三阶累积量分布。 (d) 200 个 Bootstrap 样本的净-Lambda 数四阶累积量分布。

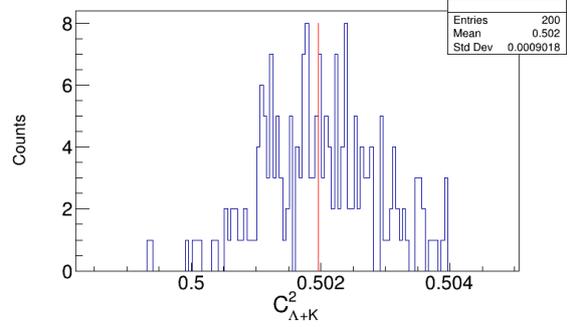


(e) 200 个 Bootstrap 样本的净-Lambda 数的  $C_1/C_2$  分布。 (f) 200 个 Bootstrap 样本的净-Lambda 数的  $C_3/C_2$  分布。 (g) 200 个 Bootstrap 样本的净-Lambda 数的  $C_4/C_2$  分布。

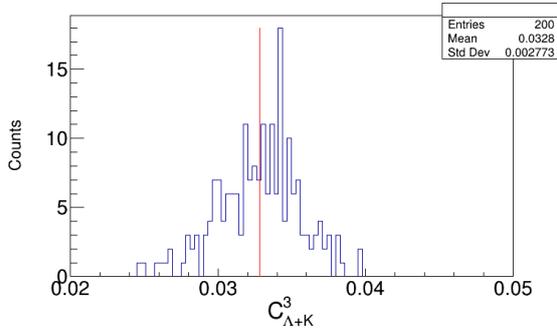
图 6.3: 金核 + 金核 27 GeV (Run-18) 碰撞能量下, 中心度为 70-80% 的 200 个 Bootstrap 样本的净-Lambda 累积量和累积量的比值的分布。蓝色的线是 Bootstrap 样本计算出来的累积量估计值分布的直方图, 红色的线是使用原始样本计算出来的累积量的估计值。



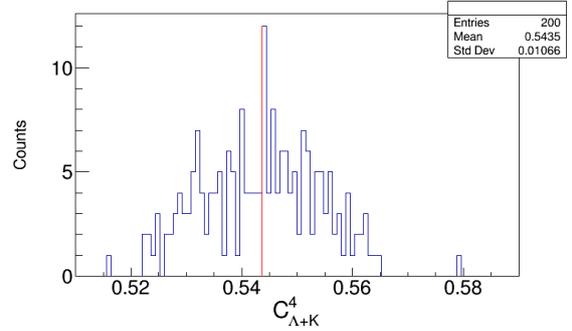
(a) 200 个 Bootstrap 样本的净-(K+ $\Lambda$ ) 一阶累积量分布。



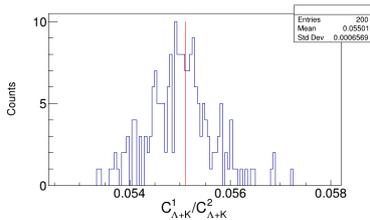
(b) 200 个 Bootstrap 样本的净-(K+ $\Lambda$ ) 二阶累积量分布。



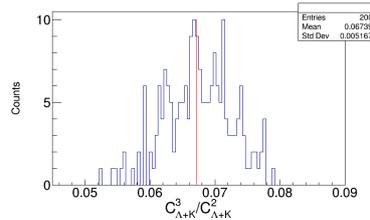
(c) 200 个 Bootstrap 样本的净-(K+ $\Lambda$ ) 三阶累积量分布。



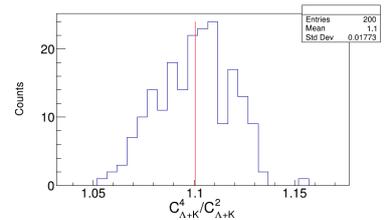
(d) 200 个 Bootstrap 样本的净-(K+ $\Lambda$ ) 四阶累积量分布。



(e) 200 个 Bootstrap 样本的净-(K+ $\Lambda$ ) 的  $C1/C2$  分布。



(f) 200 个 Bootstrap 样本的净-(K+ $\Lambda$ ) 的  $C3/C2$  分布。



(g) 200 个 Bootstrap 样本的净-(K+ $\Lambda$ ) 的  $C4/C2$  分布。

图 6.4: 金核 + 金核 27 GeV (Run-18) 碰撞能量下, 中心度为 70-80% 的 200 个 Bootstrap 样本的净 (Lambda+Kaon) 累积量和累积量的比值的分布。蓝色的线是 Bootstrap 样本计算出来的累积量估计值分布的直方图, 红色的线是使用原始样本计算出来的累积量的估计值。

### 6.1.2 系统误差估计

在本实验分析中，系统误差的来源主要可以分为两类：一类是径迹判选条；另一类是探测器的效率，由于探测效率的估计具有误差因此也会给实验结果带来误差。带电粒子的测量和鉴别是通过 STAR 子探测器 TPC 使用适当的径迹筛选条件来完成的，如拟合用到的击中径迹数 (nFitpoints)、最接近主碰撞顶点的距离 (DCA)、nSigma 等 [102]。我们通过改变这些量的不同筛选条件来选择数据样本。这些径迹质量筛选条件在对  $K^+$  和  $K^-$  计数时起到相当重要的作用，而我们要利用  $K^+$  和  $K^-$  的数目来计算净 Kaon 分布的数值特征。在本分析中默认筛选条件的显著变化会导致净 Kaon 累积量最终结果的明显改变。因此在做系统误差时，需要改变默认的筛选条件，这些改变后的筛选条件如何选取需要一定的讲究，在选择用于系统误差估计的不同径迹质量筛选条件时，为了使系统误差的估计结果是无偏的，我们选择的那些筛选条件应该和默认的筛选条件比较接近 [22]。

重建 Lambda 所用到的质子和  $\pi$  介子的筛选条件以及 Lambda 的拓扑筛选条件也是系统误差的重要来源，同样 Lambda 质量窗口的选择也是系统误差的一个重要来源。PDG 上 Lambda 的质量为  $1.11568 GeV/c^2$ ，但对于寿命相对较短的粒子，由于不确定性原理，质量没有确定值而是在一个区间上分布。因此，Lambda 质量区间的选择也决定了 Lambda 粒子的数量，从而决定了各阶累积量的值。我们将 Lambda 质量窗口的选择对累积量的影响纳入了系统误差。

另一方面，根据 embedding 样本估计的效率也并不是完全精确的，总体上效率有大约 5% 的变化范围。这种变化也包含在累积量分析的系统误差中。在这种情况下，我们选择每个中心度的效率变化为默认值的  $\pm 5\%$ 。下面列出了要改变的不同物理量以及它们的取值：

- DCA < 0.8, 0.9, 1.0 (默认), 1.1, 1.2.
- nFitPoints > 13, 14, 15(默认), 16, 17.
- nSigma > 1.8, 1.9, 2.0(默认), 2.1 2.2.
- Lambda 拓扑筛选条件: 质子螺旋线到  $\pi$  介子螺旋线最接近的距离 ( $DCA_{p\pi}$ ) < 0.5, 0.55, 0.6(默认), 0.65, 0.7.
- Lambda 拓扑筛选条件: 质子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_p$ ) > 0.4, 0.45, 0.5(默认), 0.55, 0.6.

- Lambda 拓扑筛选条件:  $\pi$  介子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_\pi$ )  $> 1.3, 1.4, 1.5$ (默认),  $1.6, 1.7$ .
- 重建 Lambda 时所用质子筛选条件  $|n\sigma_p| < 1.5, 2.0$ (默认),  $2.5$ .
- 重建 Lambda 时所用  $\pi$  介子筛选条件  $|n\sigma_\pi| < 1.5, 2.0$ (默认),  $2.5$ .
- Lambda 质量窗口:  $1.11 < m_\Lambda < 1.12 \text{ GeV}/c^2, 1.112 < m_\Lambda < 1.12 \text{ GeV}/c^2$ (默认),  $1.11168 < m_\Lambda < 1.11968 \text{ GeV}/c^2$ .
- Kaon 和 Lambda 的效率: 改变  $+5\%$  和  $-5\%$ .

总的系统误差由以下公式估计 [22]:

$$\sigma_{sys} = |Y_{\text{def}}| \sqrt{\sum_j R_j^2}, \quad R_j = \sqrt{\frac{1}{n_j} \sum_i \left[ \frac{Y_{i,j} - Y_{\text{def}}}{Y_{\text{def}}} \right]^2} \quad (6.11)$$

其中  $Y_{\text{def}}$  表示累积量的默认值, 即在我们分析所用的筛选条件下计算出来的值。  $Y_{i,j}$  表示第  $j$  个误差来源的第  $i$  个筛选条件变化值时累积量的值。  $j$  表示系统误差的不同来源,  $j$  的取值为刚才所列的  $DCA$ 、 $nFitPoints$ 、 $nSigma$ 、Lambda 的拓扑筛选条件、Lambda 质量窗口和效率等,  $i$  表示某个来源的不同取值, 对于第  $j$  个来源取了  $n_j$  个不同的变化值。我们首先计算由每个误差来源引起的系统误差  $R_j$ , 然后将它们的平方相加, 最后取平方根得到系统误差。

为了观察每个误差源的不同筛选条件对各阶累积量测量结果的影响, 我把每个误差源的不同筛选条件下的各阶累积量的结果画了出来。图6.5是不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的一阶累积量的值, 四个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是  $DCA$ 、 $nFitPoints$ 、效率和  $nSigma$ 。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的值。

图6.12, 图6.6和图6.7分别是二阶累积量、三阶累积量和四阶累积量的情况。

图6.8到图6.11展示了由于 Lambda 的筛选条件引起的系统误差。从图6.8到图6.11分别是净-(Kaon+Lambda) 的一阶累积量到四阶累积量的值。每个图中不同的版面对应不同的系统误差来源, 分别是质子螺旋线到  $\pi$  介子螺旋线最接近的距离 ( $DCA_{p\pi}$ )、质子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_p$ )、 $\pi$  介子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_\pi$ )、重建 Lambda 时所用质子筛选条件  $|n\sigma_p|$ 、重建 Lambda 时所用  $\pi$  介子筛选条件  $|n\sigma_\pi|$ 、Lambda 质量窗口。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的值。

我们使用相同的方法来计算净-(Kaon+Lambda) 累积量比值的系统误差。图6.13, 图6.14和图6.15是改变 DCA、nFitPoints、效率和 Nsigma 时引起的系统误差, 这三个图分别对应着 C1/C2, C3/C2 和 C4/C2。图6.16到图6.18 展示了由于 Lambda 的筛选条件引起的系统误差。每个图中不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是质子螺旋线到  $\pi$  介子螺旋线最接近的距离 ( $DCA_{p\pi}$ )、质子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_p$ )、 $\pi$  介子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_\pi$ )、重建 Lambda 时所用质子筛选条件  $|n\sigma_p|$ 、重建 Lambda 时所用  $\pi$  介子筛选条件  $|n\sigma_\pi|$ 、Lambda 质量窗口。这三个图分别对应着 C1/C2, C3/C2 和 C4/C2。

从各个图中可以直观的看出各个系统误差来源对测量结果的影响, 以及对系统误差贡献的大小, 比较明显的是重建 Lambda 时所用质子和  $\pi$  介子筛选条件对测量结果的影响较大, 它们是系统误差的主要来源。我把系统误差的估计结果画在了6.2小节。

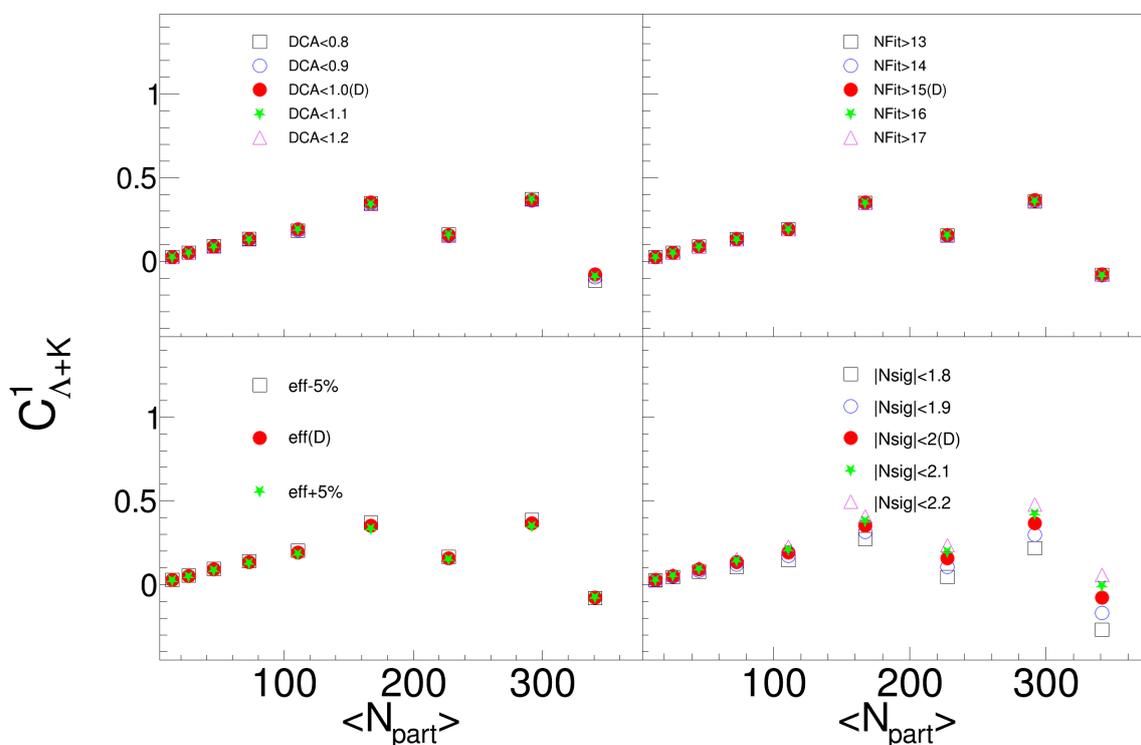


图 6.5: 不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的一阶累积量的值, 四个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是 DCA、nFitPoints、效率和 Nsigma。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的值。

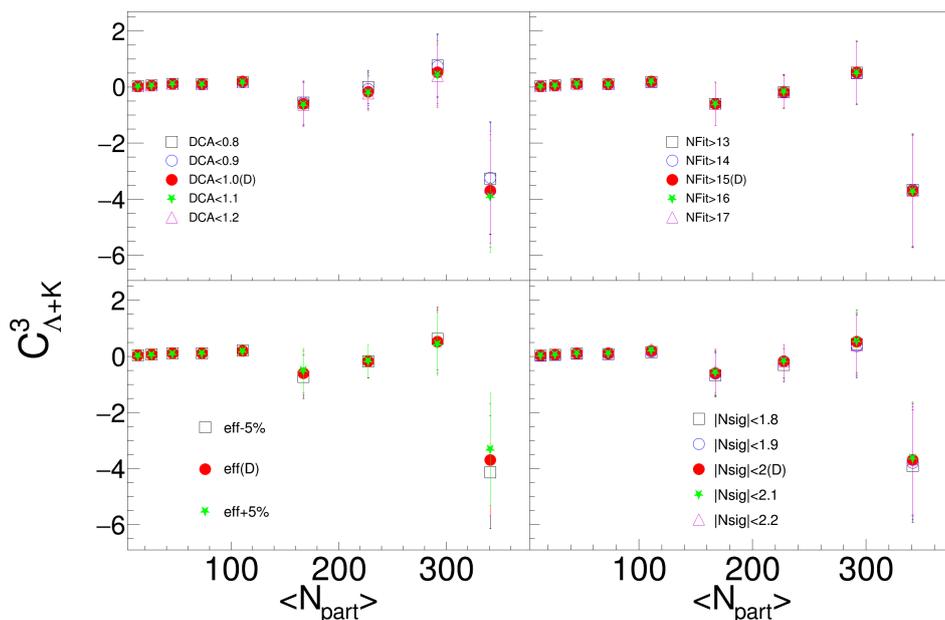


图 6.6: 不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的三阶累积量的值, 四个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是 DCA、nFitPoints、效率和 Nsigma。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的值。

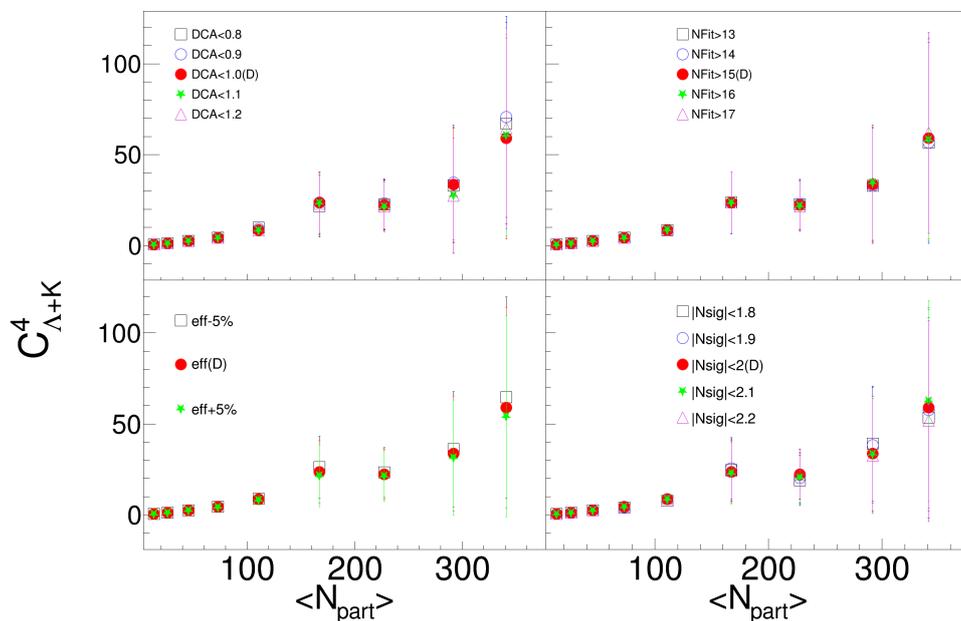


图 6.7: 不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的四阶累积量的值, 四个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是 DCA、nFitPoints、效率和 Nsigma。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的值。

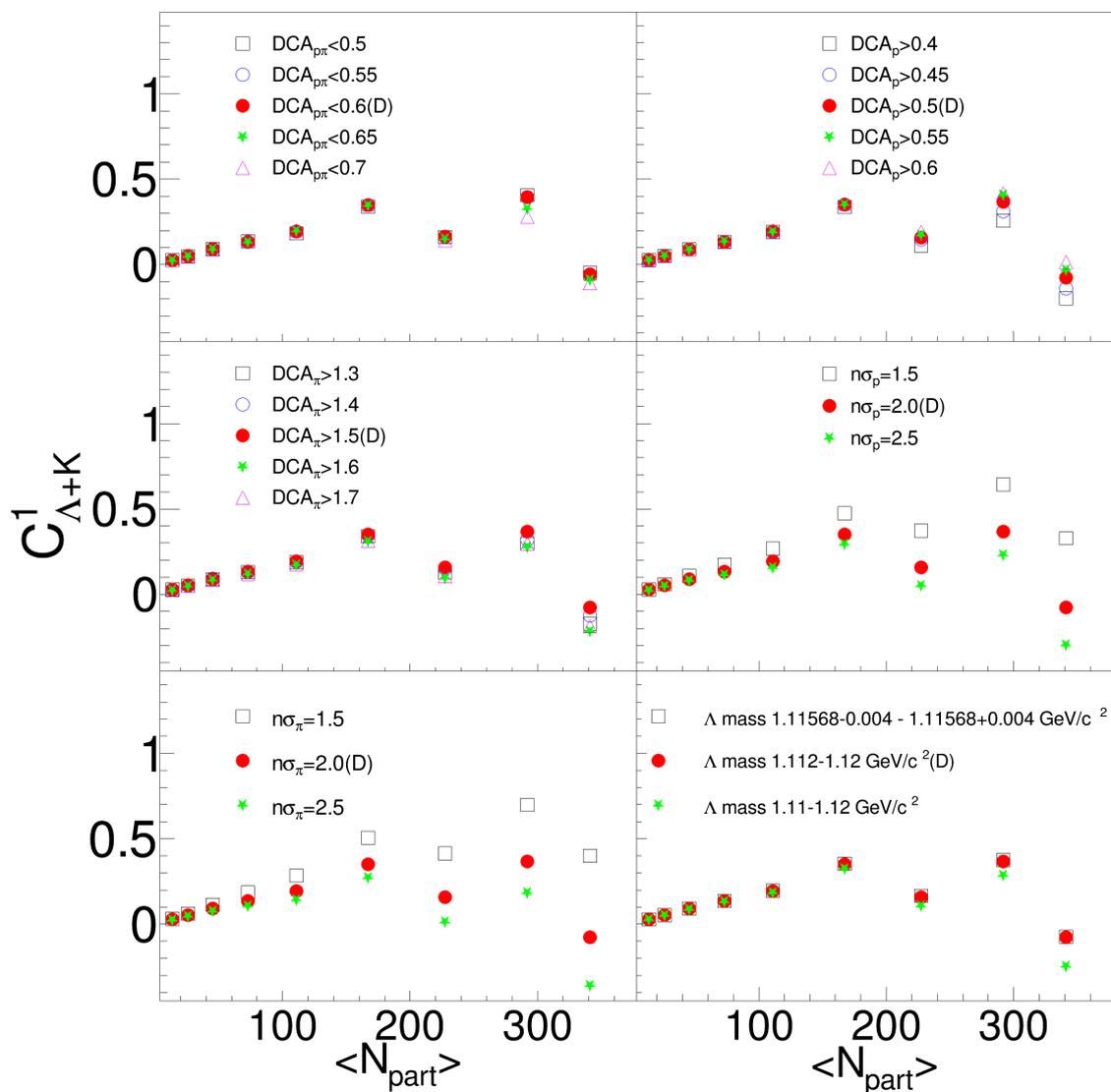


图 6.8: 不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的一阶累积量的值, 六个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是质子螺旋线到  $\pi$  介子螺旋线最接近的距离 ( $DCA_{p\pi}$ )、质子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_p$ )、 $\pi$  介子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_\pi$ )、重建 Lambda 时所用质子筛选条件  $|n\sigma_p|$ 、重建 Lambda 时所用  $\pi$  介子筛选条件  $|n\sigma_\pi|$ 、Lambda 质量窗口。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的值。

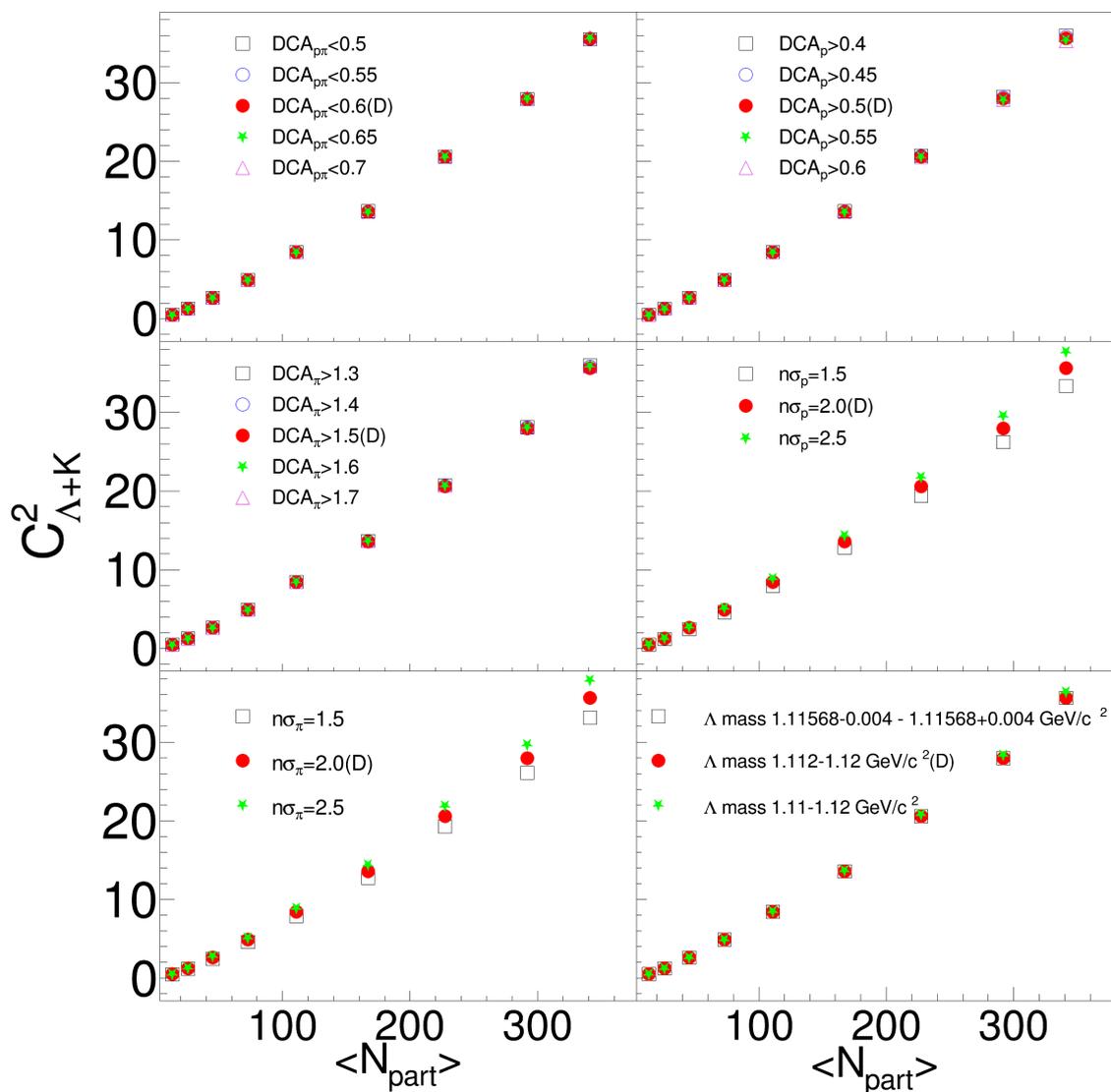


图 6.9: 不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的二阶累积量的值, 六个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是质子螺旋线到  $\pi$  介子螺旋线最接近的距离 ( $DCA_{p\pi}$ )、质子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_p$ )、 $\pi$  介子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_{\pi}$ )、重建 Lambda 时所用质子筛选条件  $|n\sigma_p|$ 、重建 Lambda 时所用  $\pi$  介子筛选条件  $|n\sigma_{\pi}|$ 、Lambda 质量窗口。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的值。

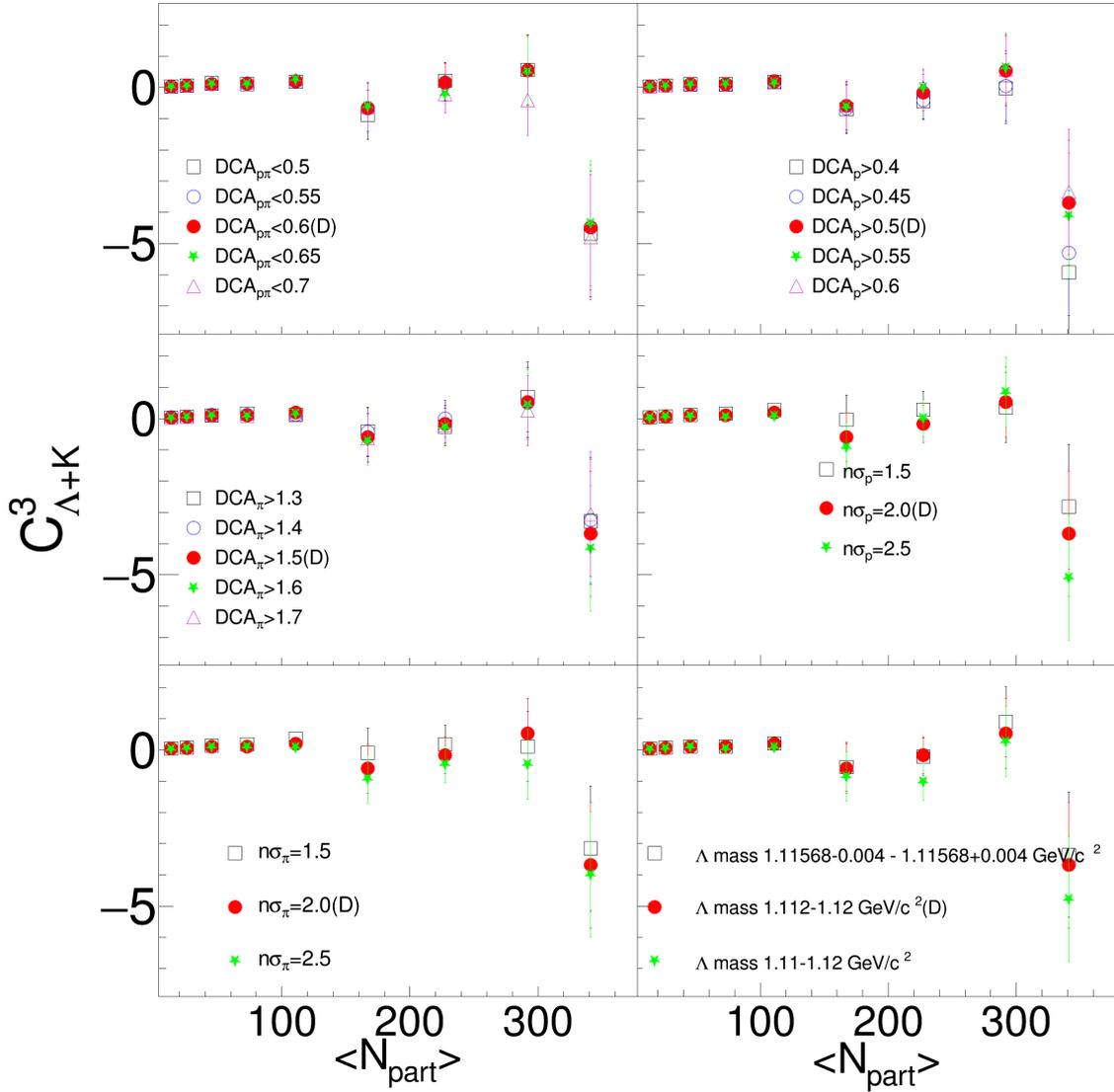


图 6.10: 不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的三阶累积量的值, 六个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是质子螺旋线到  $\pi$  介子螺旋线最接近的距离 ( $DCA_{p\pi}$ )、质子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_p$ )、 $\pi$  介子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_{\pi}$ )、重建 Lambda 时所用质子筛选条件  $|n\sigma_p|$ 、重建 Lambda 时所用  $\pi$  介子筛选条件  $|n\sigma_{\pi}|$ 、Lambda 质量窗口。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的值。

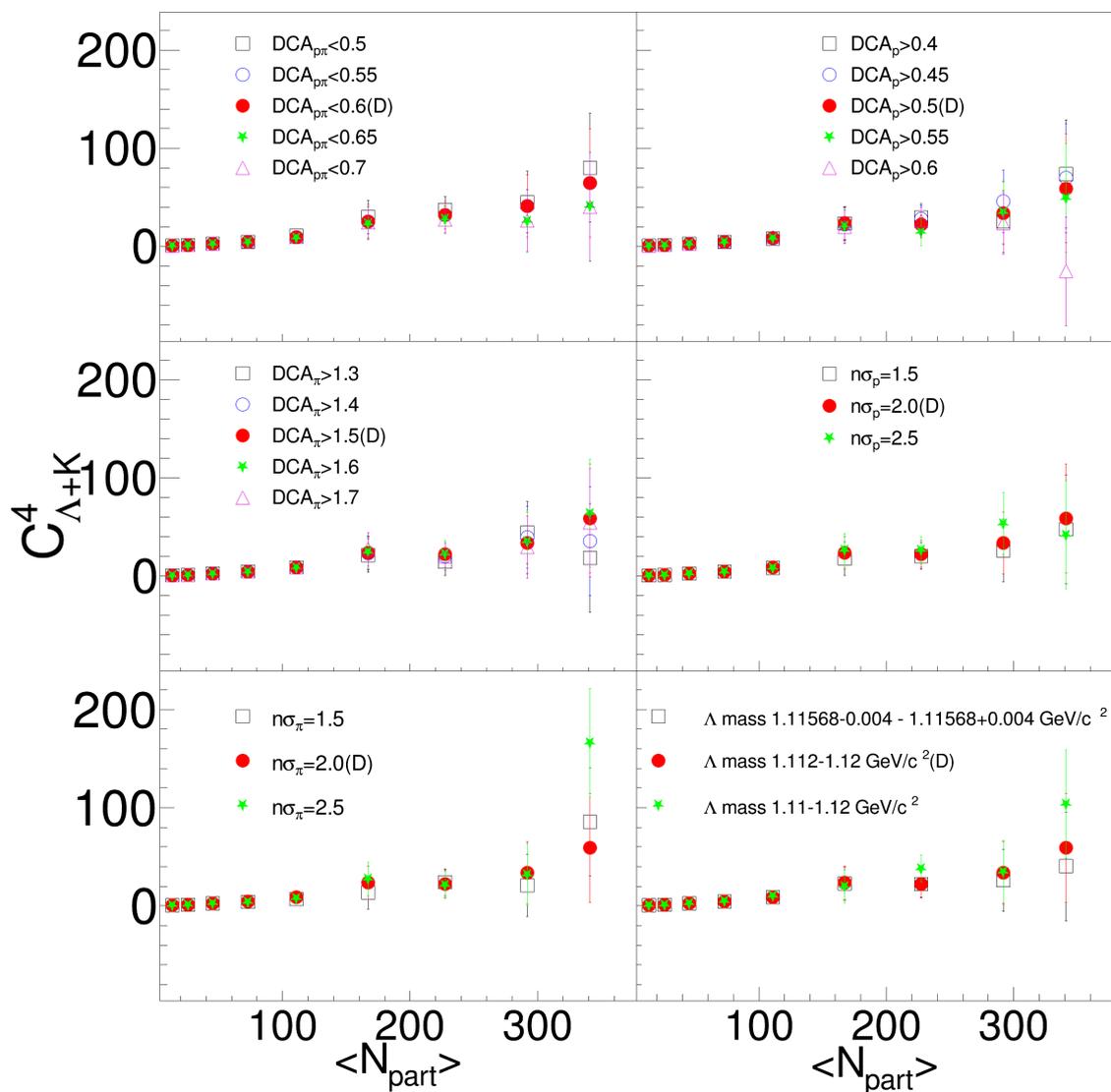


图 6.11: 不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的四阶累积量的值, 六个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是质子螺旋线到  $\pi$  介子螺旋线最接近的距离 ( $DCA_{p\pi}$ )、质子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_p$ )、 $\pi$  介子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_{\pi}$ )、重建 Lambda 时所用质子筛选条件  $|n\sigma_p|$ 、重建 Lambda 时所用  $\pi$  介子筛选条件  $|n\sigma_{\pi}|$ 、Lambda 质量窗口。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的值。

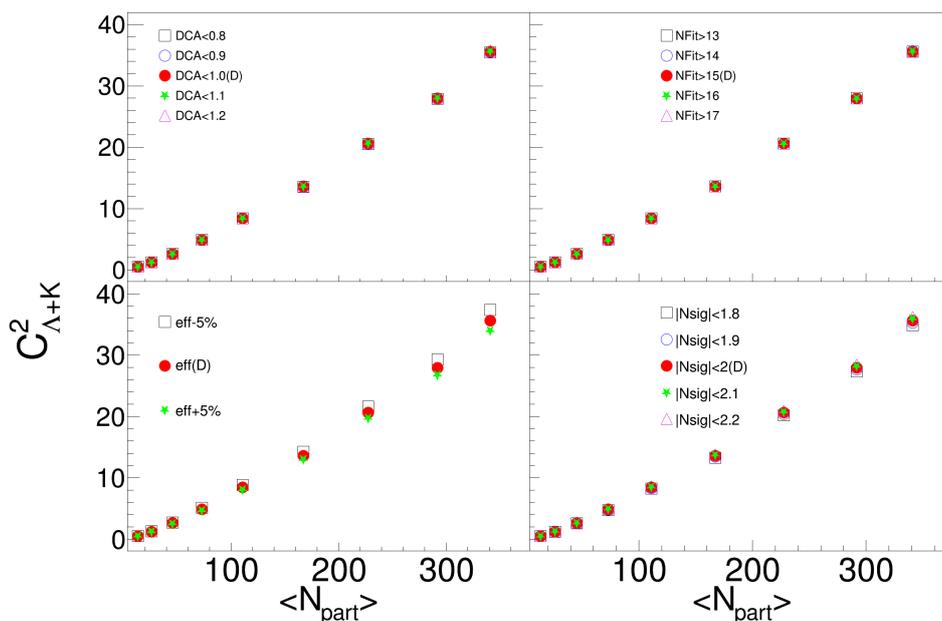


图 6.12: 不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的二阶累积量的值, 四个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是 DCA、nFitPoints、效率和 Nsigma。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的值。

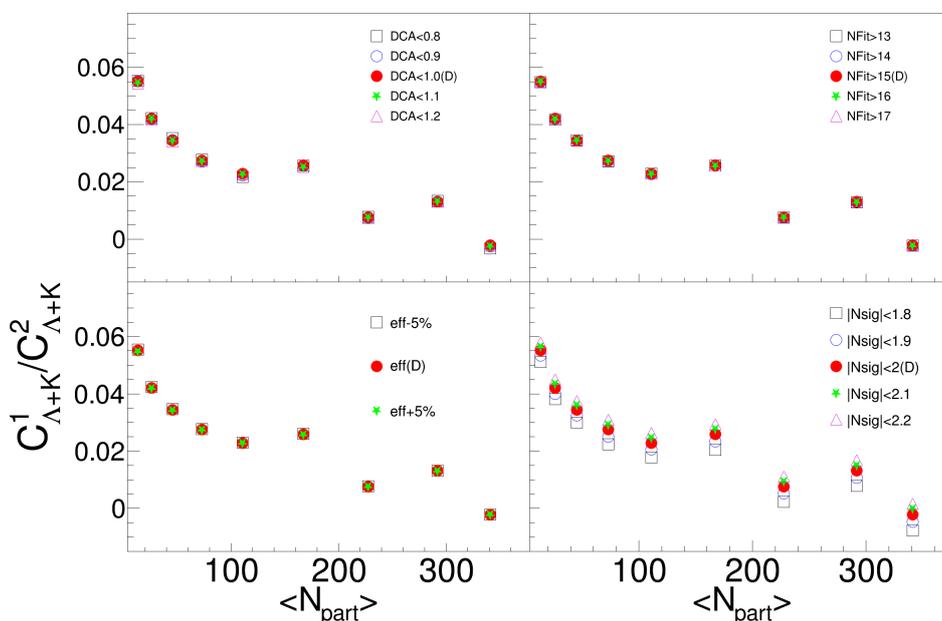


图 6.13: 不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的 C1/C2 的值, 四个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是 DCA、nFitPoints、效率和 Nsigma。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的值。

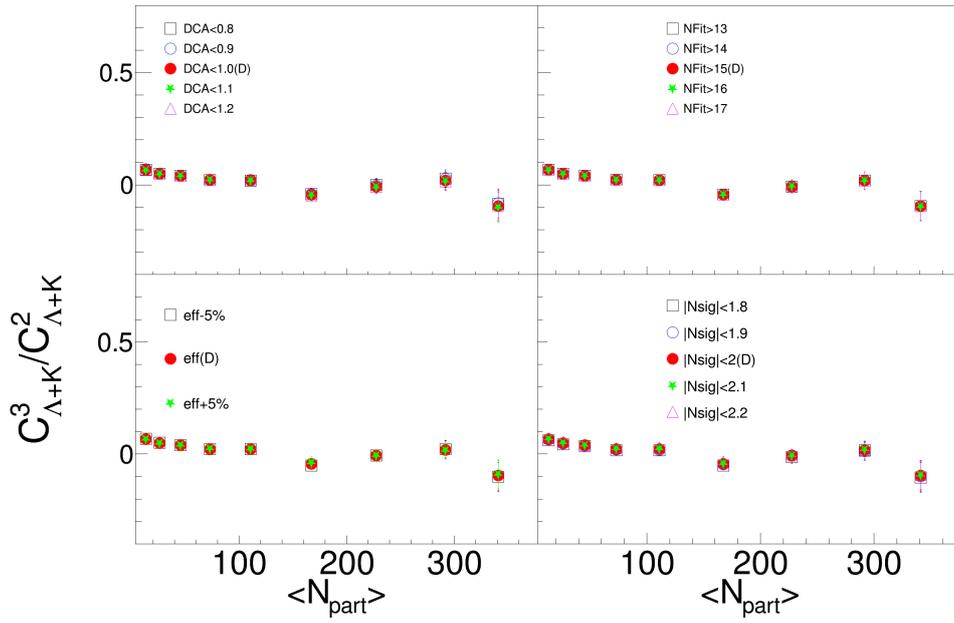


图 6.14: 不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的  $C^3/C^2$  的值, 四个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是 DCA、nFitPoints、效率和 Nsigma。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的值。

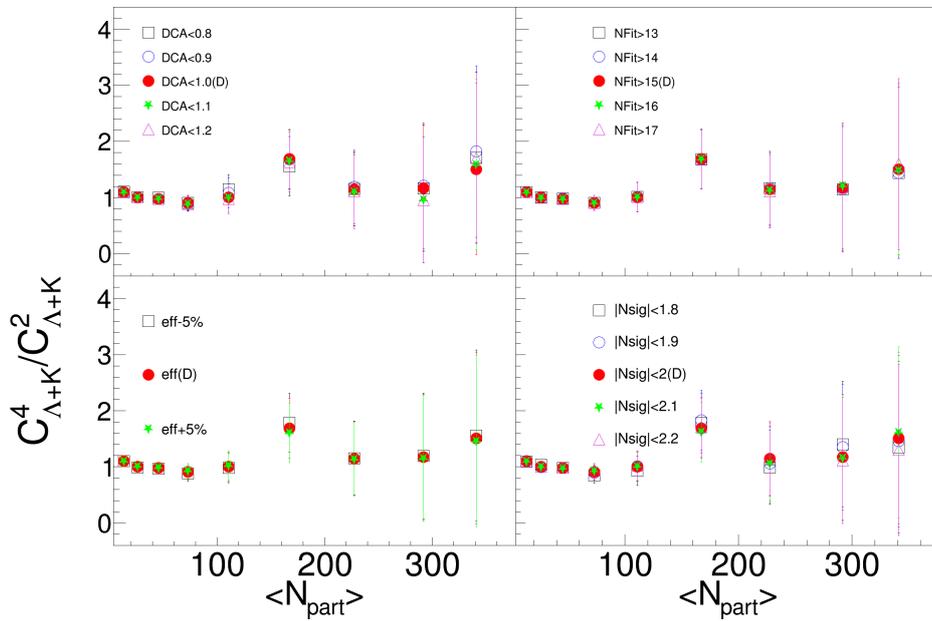


图 6.15: 不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的  $C^4/C^2$  的值, 四个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是 DCA、nFitPoints、效率和 Nsigma。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的比值。

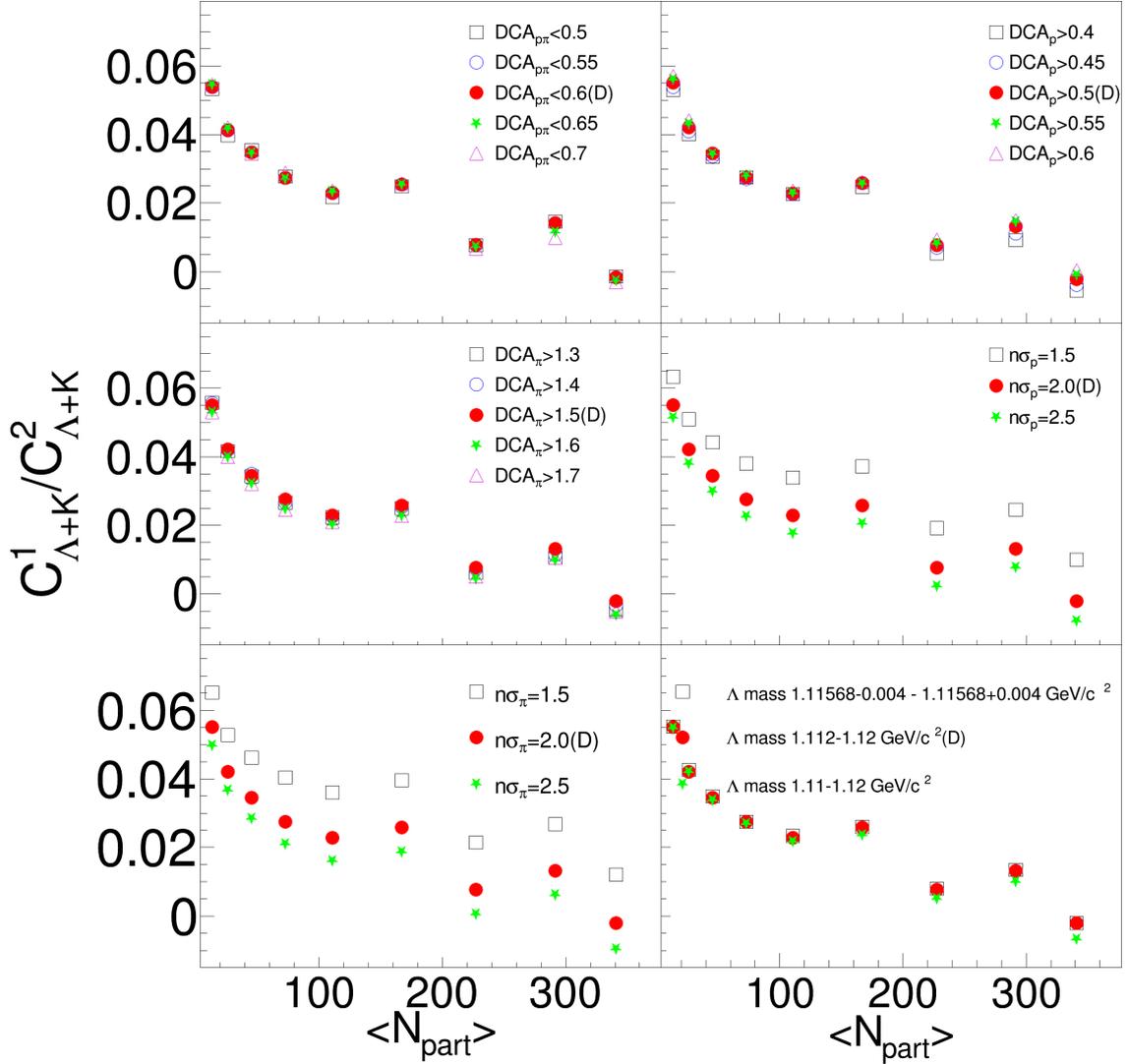


图 6.16: 不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的  $C1/C2$  的值, 六个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是质子螺旋线到  $\pi$  介子螺旋线最近的距离 ( $DCA_{p\pi}$ )、质子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_p$ )、 $\pi$  介子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_{\pi}$ )、重建 Lambda 时所用质子筛选条件  $|n\sigma_p|$ 、重建 Lambda 时所用  $\pi$  介子筛选条件  $|n\sigma_{\pi}|$ 、Lambda 质量窗口。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的值。

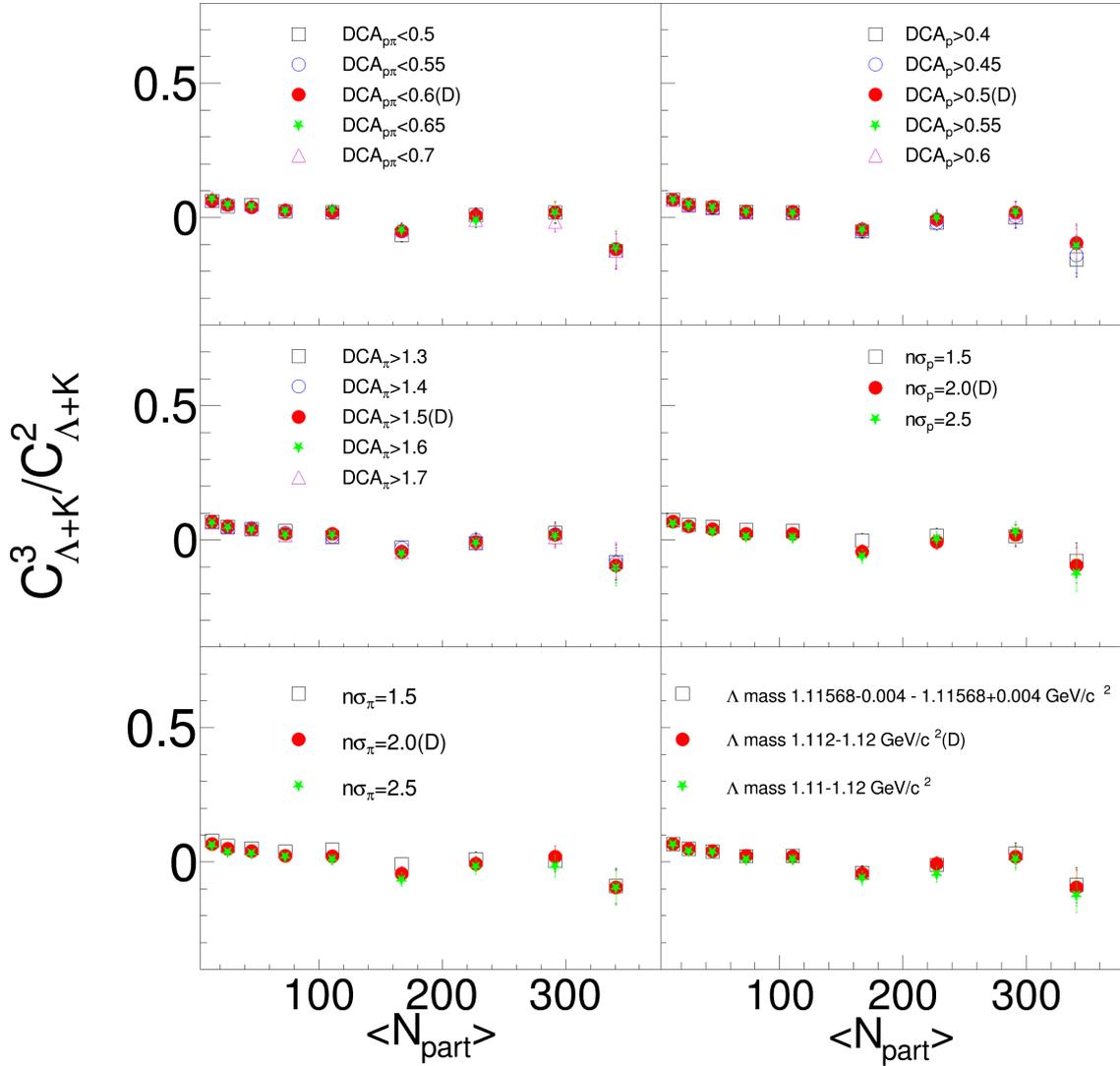


图 6.17: 不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的  $C^3/C^2$  的值, 六个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是质子螺旋线到  $\pi$  介子螺旋线最近的距离 ( $DCA_{p\pi}$ )、质子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_p$ )、 $\pi$  介子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_{\pi}$ )、重建 Lambda 时所用质子筛选条件  $|n\sigma_p|$ 、重建 Lambda 时所用  $\pi$  介子筛选条件  $|n\sigma_{\pi}|$ 、Lambda 质量窗口。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的值。

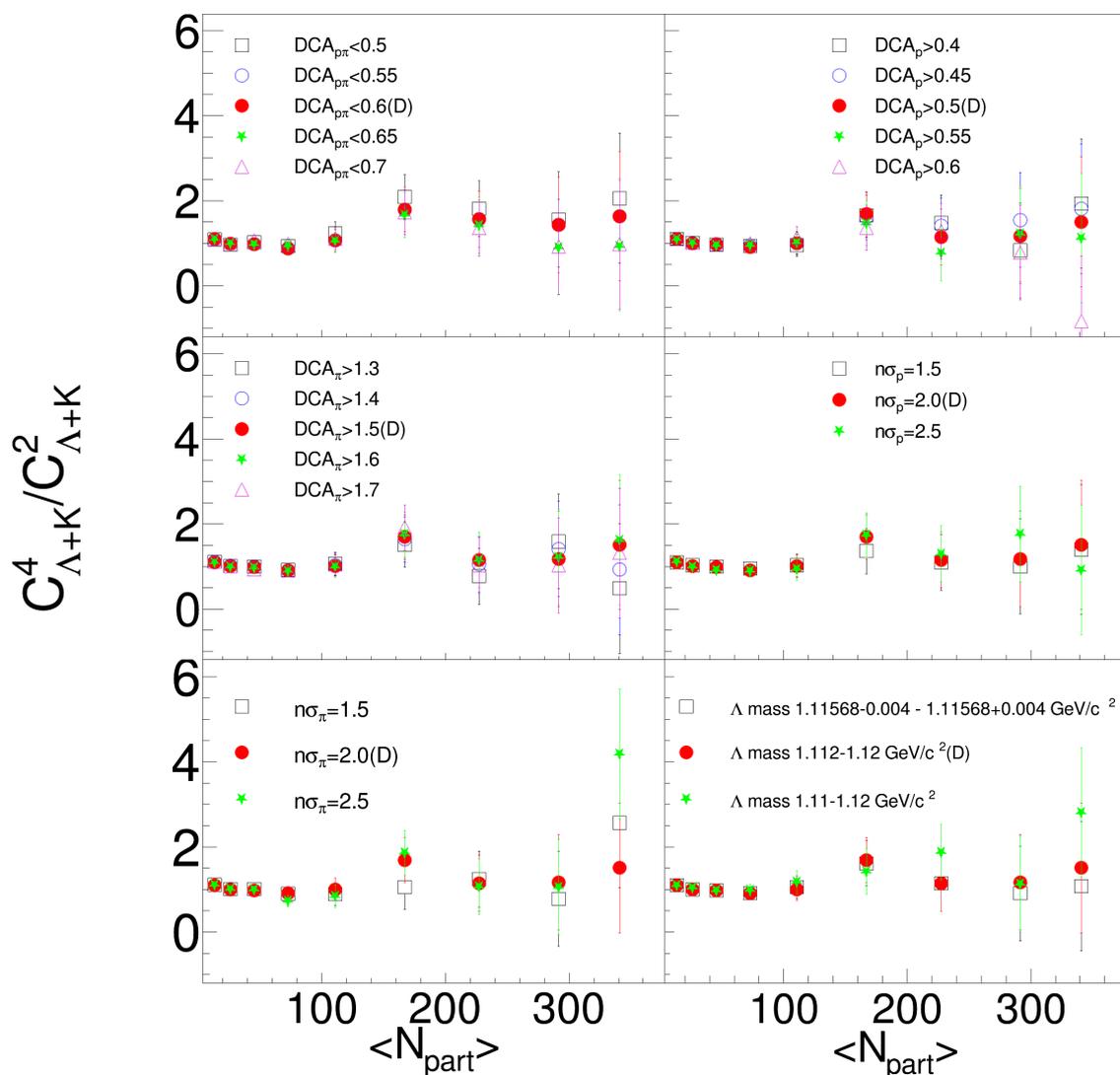


图 6.18: 不同系统误差来源时不同筛选条件下的净-(Kaon+Lambda) 的  $C^4/C^2$  的值, 六个不同的版面对应于不同的误差来源, 分别是质子螺旋线到  $\pi$  介子螺旋线最近的距离 ( $DCA_{p\pi}$ )、质子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_p$ )、 $\pi$  介子螺旋线到主碰撞顶点的最近的距离 ( $DCA_{\pi}$ )、重建 Lambda 时所用质子筛选条件  $|n\sigma_p|$ 、重建 Lambda 时所用  $\pi$  介子筛选条件  $|n\sigma_{\pi}|$ 、Lambda 质量窗口。不同颜色的标号对应不同的筛选条件, 其中红色的标号是默认筛选条件下的值。

## 6.2 高阶累积量的测量结果与讨论

净电荷、净质子和净 Kaon 多重数分布的累积量分别与净电荷数、净重子数和净奇异数的感受系数有关。然而在相对论重离子碰撞中，相对于净 Kaon 或者净 Lambda，净 (Lambda+Kaon) 多重数分布的累积量对净奇异数感受系数更加敏感，它比单独选取净 Kaon 或者净 Lambda 能更全面反映净奇异数的涨落。因此，它可以为研究相对论重离子碰撞中味道依赖的化学冻出参数提供一种视角。我们使用 2018 年采集的数据计算了在  $\sqrt{s_{NN}} = 27$  GeV 金核 + 金核碰撞中的高阶（一阶至四阶）累积量及其比值。

首先，再重新介绍一下净 Kaon(Net-K)、净  $\Lambda$ (Net- $\Lambda$ ) 和净  $(K+\Lambda)$ (Net- $(K+\Lambda)$ ) 的定义。我们都知道  $K^+$  包含 u 夸克和  $\bar{s}$  夸克， $K^-$  包含  $\bar{u}$  夸克和 s 夸克。 $\bar{s}$  夸克的奇异数是 +1, s 夸克的奇异数是-1。所以  $K^+$  的奇异数是 +1， $K^-$  的奇异数是-1。我们要计算净  $\bar{s}$  数，因此，我们将 Net-K 定义为  $K^+ - K^-$ 。类似地， $\Lambda$  包含 u 夸克、d 夸克和 s 夸克， $\bar{\Lambda}$  包含  $\bar{u}$  夸克、 $\bar{d}$  夸克和  $\bar{s}$  夸克。所以  $\Lambda$  的奇异数是-1， $\bar{\Lambda}$  的奇异数是 +1。因此，将净- $\Lambda$  定义为  $\bar{\Lambda} - \Lambda$ 。

对于 Net- $(\Lambda + K)$ ，我们应该注意，用  $K^+$  与  $\bar{\Lambda}$  的和减去  $K^-$  与  $\Lambda$  的和。这是因为  $K^+$  与  $\bar{\Lambda}$  都包含  $\bar{s}$  夸克，它们的奇异数都是 +1； $K^-$  与  $\Lambda$  都包含 s 夸克，它们的奇异数都是-1。我们想要计算净  $\bar{s}$ ，因此，我们将 Net- $(\Lambda + K)$  定义为  $(K^+ + \bar{\Lambda}) - (K^- + \Lambda)$ 。在表6.1中列出了粒子的夸克组成和奇异数。

表 6.1: 夸克组成与粒子奇异数

粒子种类	夸克组成	奇异数
$K^+$	u, $\bar{s}$	+1
$K^-$	$\bar{u}$ , s	-1
$\Lambda$	u, d, s	-1
$\bar{\Lambda}$	$\bar{u}$ , $\bar{d}$ , $\bar{s}$	+1

在表6.2中列出了净-K, 净- $\Lambda$  和净- $(\Lambda + K)$  的定义，其中， $N_{K^+}$  表示  $K^+$  粒子的总数。为了简单起见，本论文中有时会将  $N_{K^+}$  缩写为  $K^+$ ，将  $N_{\Lambda}$  缩写为  $\Lambda$  等等。

经过分析计算并做了效率修正和中心度宽度修正，同时估计了统计误差和系统误差我们得到了最终的结果。图6.19、图6.20和图6.21分别是净 Kaon、净 Lambda 和净 (Lambda+Kaon) 的前四阶累积量作为中心度的函数。分析所用到的相空间为横动量

表 6.2: 净守恒荷的定义

净守恒荷	定义
净-K	$N_{K^+} - N_{K^-}$
净- $\Lambda$	$N_{\bar{\Lambda}} - N_{\Lambda}$
净-( $\Lambda + K$ )	$(N_{K^+} + N_{\bar{\Lambda}}) - (N_{K^-} + N_{\Lambda})$

区间  $0.4 < p_T < 1.6$  GeV/c 且快度区间  $|y| < 0.5$ 。

图中  $\langle N_{\text{part}} \rangle$  的最小值对应中心度为 70-80%， $\langle N_{\text{part}} \rangle$  的最大值对应中心度为 0-5%，以此类推，金核 + 金核 27 GeV (Run-18) 能量下不同中心度与  $\langle N_{\text{part}} \rangle$  以及 RefMult2 取值范围之间的对应关系列在了表4.6。图中实心圆表示累积量的值，直线表示统计误差，方框表示系统误差，粉红色的带是 UrQMD 模型的计算结果。

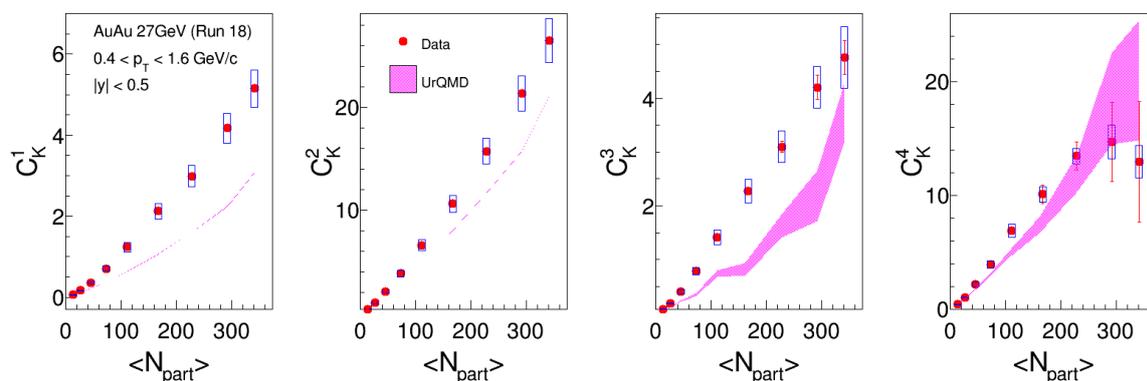


图 6.19: 净 Kaon 的前四阶累积量，四个不同的版面对应不同的阶累积量。实心圆表示累积量的值，直线表示统计误差，方框表示系统误差，粉红色的带是 UrQMD 模型的计算结果。

图6.19是净 Kaon 多重数分布的前四阶累积量，从左到右分别是  $C_1$  到  $C_4$ ，这四个累积量都是用来描述净 Kaon 多重数分布情况的。对于净 Kaon 来说，随着  $\langle N_{\text{part}} \rangle$  增大，即越靠近最中心碰撞  $C_1$ （即平均值）越大，这说明越靠近最中心碰撞沉积的能量越大，产生的奇异粒子越多。同样，越靠近最中心碰撞  $C_2$  越大，这说明越靠近最中心碰撞净 Kaon 多重数分布越宽，可以这样理解，由于越靠近中心碰撞可以产生越多的粒子数目，因此净 Kaon 的数目可以达到更大的范围，因此越最中心碰撞的净 Kaon 多重数分布越宽。

$C_3$  和分布的偏度相关,  $C_4$  和分布的峰度相关, 当净 Kaon 多重数分布为高斯分布时,  $C_3$  和  $C_4$  的值为 0, 其值偏离 0 越远说明分布越偏离高斯分布, 当最中心碰撞时,  $C_3$  和  $C_4$  的值比较大, 说明此时净 Kaon 多重数分布具有非高斯形状。  $C_3$  和  $C_4$  的值同时也暗示着分布的对称性,  $C_3$  和  $C_4$  的值越接近于 0 分布越对称, 可以看出边缘碰撞的值更小、更接近于 0, 这表明边缘碰撞时净 Kaon 多重数分布更加对称。

可以这样理解累积量的中心度依赖性: 在任意给定的中心度下, 粒子产生可以被视为几个相互独立源的叠加, 而源的数量与  $\langle N_{\text{part}} \rangle$  成正比, 这意味着随着系统体积的增加,  $\langle N_{\text{part}} \rangle$  呈线性增加。这反映了累积量是与系统体积成正比的广延量, 表明体积效应主导了累积量的值。

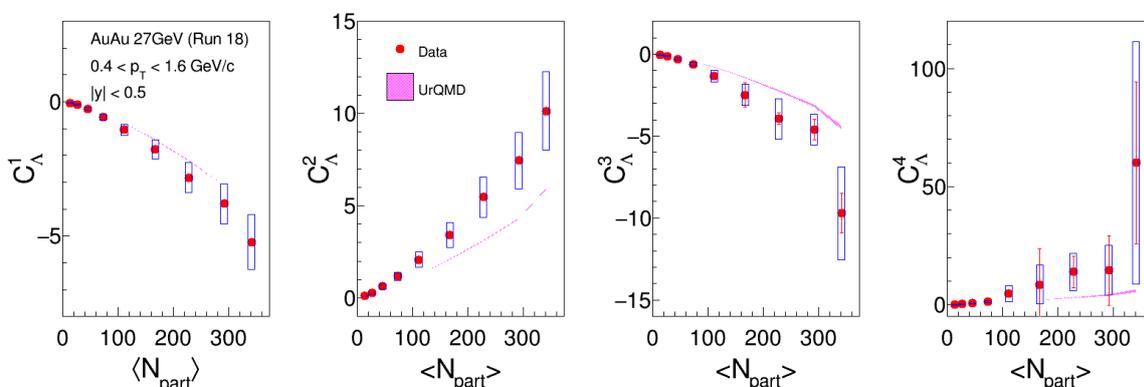


图 6.20: 净 Lambda 的前四阶累积量, 四个不同的版面对应不同的阶累积量。实心圆表示累积量的值, 直线表示统计误差, 方框表示系统误差, 粉红色的带是 UrQMD 模型的计算结果。

与图6.19类似, 图6.20是净 Lambda 的前四阶累积量作为中心度的函数。这里需要注意一下净 Lambda 的定义  $\bar{\Lambda} - \Lambda$ , 所以  $C_1$  是负值, 这表明  $\Lambda$  的产额比  $\bar{\Lambda}$  多。可以看出净 Lambda 多重数分布随中心度的变化与净 Kaon 类似, 前四阶累积量都是随  $\langle N_{\text{part}} \rangle$  呈线性增加, 尤其是  $C_1$  和  $C_2$ 。对于  $C_3$  和  $C_4$ , 整体的趋势也是随  $\langle N_{\text{part}} \rangle$  呈线性增加, 但  $C_3$  和  $C_4$  更加敏感, 波动性更大, 当  $\langle N_{\text{part}} \rangle$  更大时 (更中心的碰撞), 事例数变少, 出现了波动, 不过在误差范围内还是线性增加。造成这种情况的原因和之前介绍净 Kaon 的情况一致, 是因为粒子产生可以被视为几个相互独立的源的叠加, 而源的数量与  $\langle N_{\text{part}} \rangle$  成正比, 这意味着随着系统体积的增加,  $\langle N_{\text{part}} \rangle$  呈线性增加。

图6.21是净 (Lambda+Kaon) 的前四阶累积量,  $C_{\Lambda+K}^1$  随  $\langle N_{\text{part}} \rangle$  的增加整体上呈线性增加, 且其值为正值, 这表明净 Kaon 的产额比净 Lambda 的产额要多, 说明此时 K 介子占支配地位而不是  $\Lambda$  超子, 这明显与 UrQMD 的结果不相符, 就像在用 UrQMD 模型计算高阶累积量那一章中所提到过的, 这种差异可能是由于 UrQMD 模

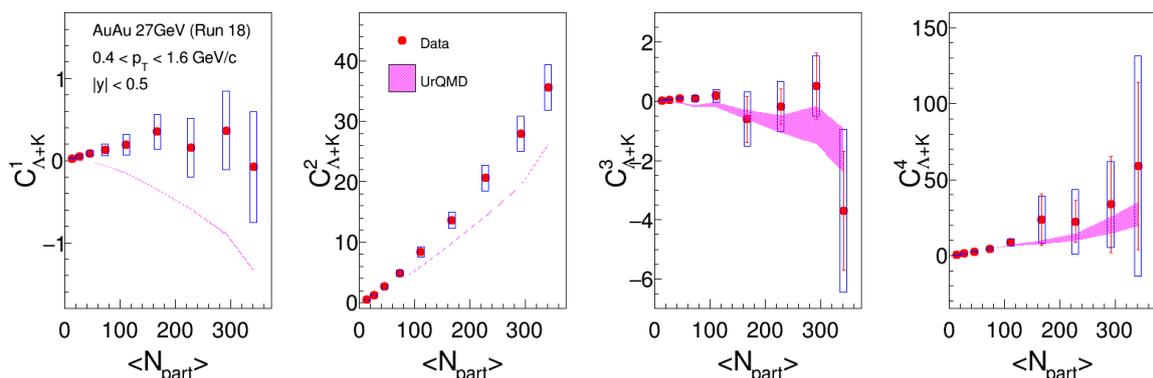


图 6.21: 净 (Lambda+Kaon) 的前四阶累积量, 四个不同的版面对应不同的阶累积量。实心圆表示累积量的值, 直线表示统计误差, 方框表示系统误差, 粉红色的带是 UrQMD 模型的计算结果。

型中的高质量共振粒子衰变产额与实验数据不一致引起的, 在 UrQMD 模型事例中包含了高质量共振态的衰变道, 或者是由于 UrQMD 模型中不包含介质修正效应引起的。  $C_1$  的变化趋势和  $C_3$  比较类似, 而  $C_2$  和  $C_4$  作为  $\langle N_{part} \rangle$  的函数具有相似的值。

通过以上对累积量的讨论, 我们知道累积量是与系统体积成正比的广延量, 体积效应主导了累积量的值。为了消除体积效应并获得微观视角, 我们在图6.22、图6.23和图6.24 分别计算出了净 Kaon、净 Lambda 和净 (Lambda+Kaon) 的累积量的比值随中心度的变化。每个图中从左到右分别是  $C_1/C_2$ 、 $C_3/C_2$  和  $C_4/C_2$ , 如之前公式3.30所讨论的, 他们等于矩和偏度以及峰度的乘积, 分别是  $M/\sigma^2$ 、 $S\sigma$  和  $\kappa\sigma^2$ 。

这里的相空间和计算累积量时相同, 即横动量区间  $0.4 < p_T < 1.6$  GeV/c 且快度区间  $|y| < 0.5$ 。同样做了效率修正和中心度宽度修正, 需要注意的是由于中心度宽度修正, 这里的比值并不是直接把图6.19到图6.21中的累积量相除, 而是先在每个 RefMult2 上算出累积量的比值, 然后再以每个 RefMult2 上的事例数为权重做加权平均, 从而算出累积量的比值。

先来看图6.22, 这是净 Kaon 累积量的比值, 存在中心度依赖关系, 尤其是对于  $C_4/C_2$  较为明显, 这可能是由于不同中心度的体积波动造成的, 虽然比值消除了体积效应, 但体积波动依然存在。同时我们也把 UrQMD 的计算结果放在了图中, 可以看出 UrQMD 的计算结果与实验数据不能很好地符合, 尤其对于  $C_1/C_2$ 。这种不相符可能是由于 UrQMD 模型中不包含介质修正效应造成的。

图6.23和图6.24分别是净 Lambda 累积量的比值和净 (Lambda+Kaon) 累积量的比值, 与净 Kaon 的情况类似,  $C_1/C_2$ 、 $C_3/C_2$  和  $C_4/C_2$  对碰撞中心度存在依赖关系。同时 UrQMD 的计算结果与实验数据不能很好地符合, 尤其对于  $C_1/C_2$ , 这种不相符

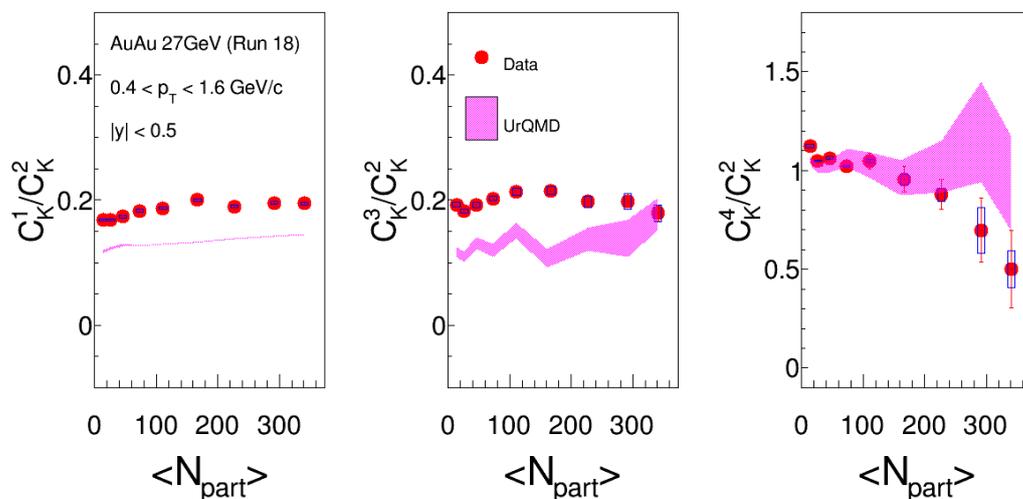


图 6.22: 净 Kaon 累积量的比值，四个不同的版面分别对应不同阶累积量的比值。实心圆表示累积量比值的值，直线表示统计误差，方框表示系统误差，粉红色的带是 UrQMD 模型的计算结果。

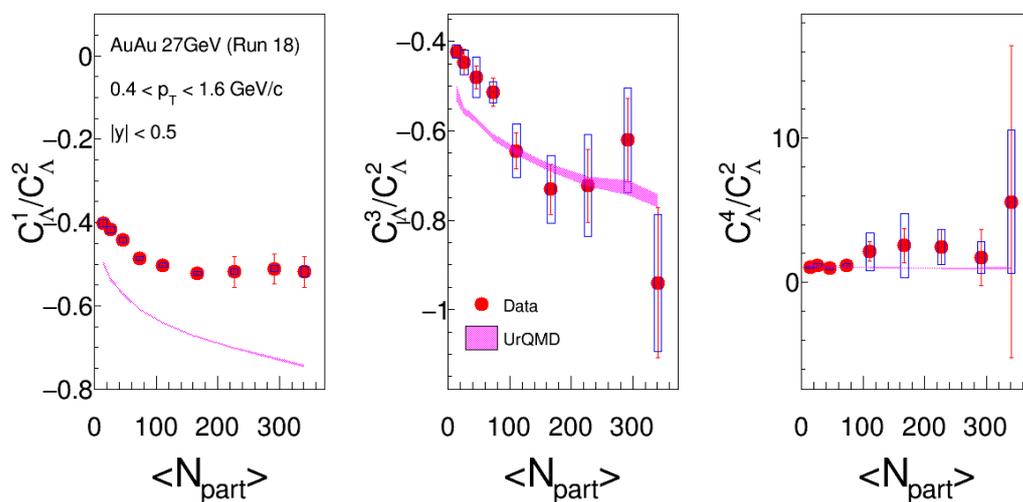


图 6.23: 净 Lambda 累积量的比值，四个不同的版面分别对应不同阶累积量的比值。实心圆表示累积量比值的值，直线表示统计误差，方框表示系统误差，粉红色的带是 UrQMD 模型的计算结果。

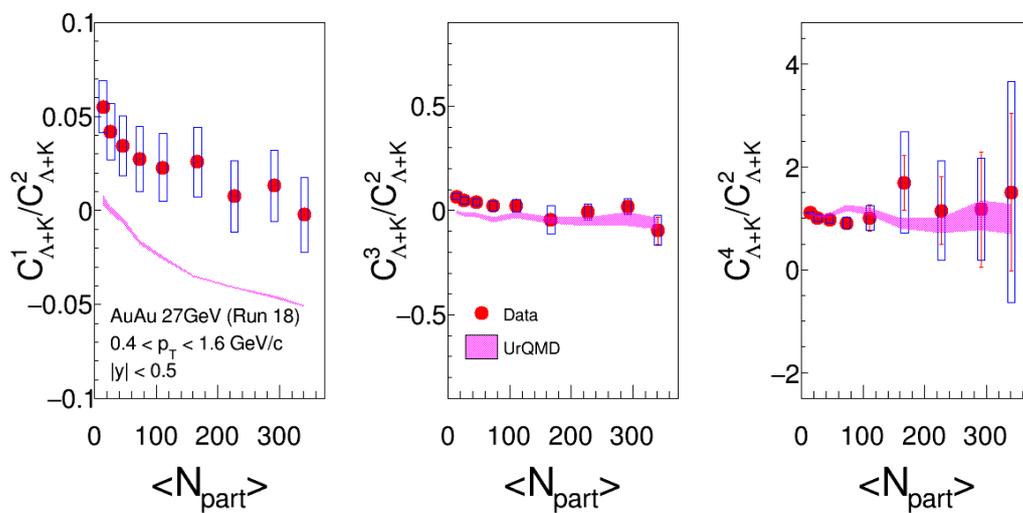


图 6.24: 净 (Lambda+Kaon) 累积量的比值, 四个不同的版面分别对应不同阶累积量的比值。实心圆表示累积量比值的值, 直线表示统计误差, 方框表示系统误差, 粉红色的带是 UrQMD 模型的计算结果。

可能是由于 UrQMD 模型中不包含介质修正效应, 或者是高质量共振粒子衰变到  $\Lambda$  的产额与实验不同造成的。

## 第七章 总结与展望

### 7.1 总结

本论文使用净  $(K+\Lambda)$  两个粒子的组合代表净奇异数，它比单独选取净  $K$  或者净  $\Lambda$  作为净奇异数的代表能更全面反映净奇异数的涨落。结合已有的 track-by-track 方法进行效率修正，计算了 STAR 实验  $\sqrt{s_{NN}}=27$  GeV 金核 + 金核碰撞中净  $(K+\Lambda)$  多重数分布的高阶 (1 至 4 阶) 累积量以及它们的比值。在分析中对于  $\Lambda$  粒子、 $K$  介子和它们的反粒子，我们选取的相空间是横向动量区间为 0.4 到 1.6 GeV/c 且快度区间为  $|y|<0.5$ 。在测量过程中为了减少自相关效应带来的影响，我们使用 RefMult2 来划分中心度；为了抑制中心度宽度效应，在分析的过程中做了中心度宽度修正；并使用 Bootstrap 方法估算了统计误差且对系统误差也做了估计。

同时，本论文也用 UrQMD 模型计算了金核 + 金核碰撞中不同碰撞能量下净  $(K+\Lambda)$  多重数分布的累积量以及累积量的比值，以此作为实验的基线，对以后其它碰撞能量下累积量的实验测量也具有一定的参考意义。

由此构建了一个完整的分析框架，并完成了 STAR 实验上  $\sqrt{s_{NN}}=27$  GeV 金核 + 金核碰撞中净  $(K+\Lambda)$  多重数分布的高阶累积量的测量。利用这个框架可以计算任意多个粒子组合的高阶累积量，并且可以直接用来分析其它碰撞能量的高阶累积量，由于 QCD 相变临界点的特征信号就是净守恒荷分布的累积量的比值随碰撞能量具有非单调的行为，因此测量不同碰撞能量下净  $(K+\Lambda)$  多重数分布的高阶累积量，可以用来寻找 QCD 相变临界点。净  $(K+\Lambda)$  多重数分布的高阶累积量还可以用来抽取奇异数化学冻出参数。在本论文中也分别测量了净  $K$  和净  $\Lambda$  多重数分布的高阶累积量，分别用它们来抽取化学冻出参数，可以研究化学冻出参数对不同粒子的依赖关系。

通过测量我们发现无论是净  $(K+\Lambda)$ 、净  $K$  或者净  $\Lambda$  前四阶累积量都是随着  $\langle N_{part} \rangle$  的增加线性增加的。可以这样理解累积量的中心度依赖性：在任意给定的中心度下，粒子产生可以被视为几个相互独立源的叠加，而源的数量与  $\langle N_{part} \rangle$  成正比，这意味着随着系统体积的增加， $\langle N_{part} \rangle$  呈线性增加。可以知道累积量是与系统体积成正比的广延量。而累积量的比值显示出对碰撞中心度的依赖关系，这是由于体积波动引起的。

对于净  $\Lambda$ ，一阶累积量的值在不同碰撞中心度下都是负值，这说明在不同中心度下  $\Lambda$  的产额都比  $\bar{\Lambda}$  多。对于净  $(K+\Lambda)$ ，一阶累积量为正值，这表明净  $K$  的产额比净  $\Lambda$  的产额多。二阶累积量描述分布的离散程度，通过测量可以看出净  $\Lambda$ 、净  $K$  和净  $(K+\Lambda)$  的二阶累积量都是随着  $\langle N_{part} \rangle$  增加而增加，这表明越靠近中心碰撞它们的分布越离散。

三阶累积量和分布的偏度有关，四阶累积量和分布的峰度相关，当分布为高斯分布时， $C_3$  和  $C_4$  的值为 0，其值偏离 0 越大说明分布越偏离高斯分布。对于净  $\Lambda$ 、净 K 和净  $(K+\Lambda)$  多重数分布，当最中心碰撞时， $C_3$  和  $C_4$  的值比较大，说明此时分布具有非高斯形状。 $C_3$  和  $C_4$  的值同时也暗示着分布的对称性， $C_3$  和  $C_4$  的值越接近于 0 分布越对称，可以看出边缘碰撞的值更小、更接近于 0，这表明边缘碰撞时分布更加对称。

通过 UrQMD 模型与实验的比较发现，UrQMD 模型不能很好的描述实验测量的高阶累积量的结果，这可能是由于 UrQMD 模型中不包含介质修正效应或者是由于 UrQMD 模型中的高质量共振粒子衰变产额与实验数据不一致引起的，关于这个问题我们还在进一步的研究中。

## 7.2 展望

本论文只测量了 STAR 实验  $\sqrt{s_{NN}}=27$  GeV 金核 + 金核碰撞中净  $\Lambda$ 、净 K 和净  $(K+\Lambda)$  多重数分布的累积量及其比值对中心度的依赖关系，下一步还可以继续研究累积量对不同相空间的依赖关系，如横动量，快度等。

我们知道 RHIC 能量扫描计划的主要目标是探索 QCD 相图并寻找 QCD 相变临界点，临界点的特征信号就是净守恒荷分布的累积量的比值随碰撞能量具有非单调的行为，本论文用净  $(K+\Lambda)$  代表净奇异数，因此测量不同碰撞能量下净  $(K+\Lambda)$  多重数分布的高阶累积量，可以用来寻找 QCD 相变临界点，这自然是接下来要进行的工作。

随着 RHIC 能量扫描计划二期实验的结束，STAR 已经采集了碰撞能量低于 27 GeV 的实验数据，如 19.6 GeV(Run-18)、17.3 GeV(Run-21)、14.6 GeV(Run-18)、11.5 GeV(Run-20)、9.2 GeV(Run-20)、7.7 GeV(Run-21)[31]。人们普遍预测 QCD 相图中的相变临界点会出现在这个区域，且之前对净质子多重数分布的高阶累积量的测量结果表明在 3GeV 以上  $C_4/C_2$  显示出对能量的非单调依赖 [29]。

因此下一步计划测量 RHIC 能量扫描计划二期采集的不同碰撞能量下的净  $(K+\Lambda)$  多重数分布的累积量以及它们的比值，把这些测量结果与本论文的实验测量结果结合起来研究累积量的比值对能量的依赖关系就变得非常有意义。同时可以挑选一些其它更敏感的粒子或几种粒子的组合来测量不同碰撞能量下它们的多重数分布的累积量以及累积量的比值。

## 参考文献

- [1] 黄涛, 曹俊. 奇妙的粒子世界[M]. 北京: 北京大学出版社, 2021.
- [2] 谢一冈, 张家铨, 赵洪明, 等. 从夸克到宇宙永无止境的科学探索[M]. 北京: 科学出版社, 2018.
- [3] 罗晓峰, 刘峰, 许怒. 万亿摄氏度下烹煮夸克汤: 核物质相结构和量子色动力学相变临界点的实验研究[J]. 物理, 2021, 50(2).
- [4] Adamczyk L, Adkins J, Agakishiev G, et al. Beam Energy Dependence of Moments of the Net-Charge Multiplicity Distributions in Au + Au Collisions at RHIC[J/OL]. Physical Review Letters, 2014, 113(9):092301[2023-09-17]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.092301>.
- [5] David G. 粒子物理导论[M]. 王青, 译. 北京: 机械工业出版社, 2017.
- [6] 杜东生, 杨茂志. 粒子物理导论[M]. 北京: 科学出版社, 2015.
- [7] 王贻芳. 探索微观世界[M]. 杭州: 浙江教育出版社, 2018.
- [8] 黄涛. 量子场导论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2015.
- [9] 何汉新. 量子色动力学及其应用[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2020.
- [10] 八木浩辅, 初田哲男, 三明康郎. 夸克胶子等离子体: 从大爆炸到小爆炸[M]. 王群, 马余刚, 庄鹏飞, 译. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2016.
- [11] 马余刚. 高能核物理前沿: 探寻夸克-胶子等离子体[J]. 现代物理知识, 2013, 025(005):27-34.
- [12] 黄卓然. 高能重离子碰撞导论[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2002.
- [13] Shen C, Heinz U. The road to precision: Extraction of the specific shear viscosity of the quark-gluon plasma[M/OL]. arXiv, 2015[2023-12-06]. <http://arxiv.org/abs/1507.01558>.
- [14] Adam J, Adamczyk L, Adams J, et al. Nonmonotonic Energy Dependence of Net-Proton Number Fluctuations[J/OL]. Physical Review Letters, 2021, 126(9):092301[2023-09-17]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.092301>.
- [15] Adamczyk L, Adams J, Adkins J, et al. Collision energy dependence of moments of net-kaon multiplicity distributions at RHIC[J/OL]. Physics Letters B, 2018, 785:551-560[2023-09-17]. <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0370269318306403>. DOI: 10.1016/j.physletb.2018.07.066.
- [16] Akiba Y, Angerami A, Caines H, et al. The Hot QCD White Paper: Exploring the Phases of QCD at RHIC and the LHC[M/OL]. arXiv, 2015[2023-10-09]. <http://arxiv.org/abs/1502.02730>.
- [17] 杨展如. 量子统计物理学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007.
- [18] 汪志诚. 热力学·统计物理[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013.
- [19] 于渌. 边缘奇迹: 相变和临界现象[M]. 北京: 科学出版社, 2016.
- [20] Athanasiou C, Rajagopal K, Stephanov M. Using higher moments of fluctuations and their ratios in the search for the QCD critical point[J/OL]. Physical Review D, 2010, 82(7):074008 [2023-09-17]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.82.074008>.
- [21] Stephanov M A. Non-Gaussian Fluctuations near the QCD Critical Point[J/OL]. Physical Review Letters, 2009, 102(3):032301[2023-09-17]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.032301>.
- [22] Sahoo N R. Probing the QCD Critical Point by higher moments of the net-charge distribution at RHIC energies[D]. Mumbai: HOMI BHABHA NATIONAL INSTITUTE, 2013.

- [23] Stephanov M A. Sign of Kurtosis near the QCD Critical Point[J/OL]. *Physical Review Letters*, 2011, 107(5):052301[2023-10-08]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.052301>.
- [24] Stephanov M, Rajagopal K, Shuryak E. Event-by-event fluctuations in heavy ion collisions and the QCD critical point[J/OL]. *Physical Review D*, 1999, 60(11):114028[2023-10-08]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.60.114028>.
- [25] Luo X, Xu N. Search for the QCD Critical Point with Fluctuations of Conserved Quantities in Relativistic Heavy-Ion Collisions at RHIC : An Overview[J/OL]. *Nuclear Science and Techniques*, 2017, 28(8):112[2023-10-08]. <http://arxiv.org/abs/1701.02105>. DOI: 10.1007/s41365-017-0257-0.
- [26] 吴善进, 宋慧超. QCD 临界点附近的动力学临界涨落[J]. *核技术*, 2023, 46(4):15.
- [27] 许坤, 黄梅. QCD 临界终点与重子数扰动[J]. *核技术*, 2023, 46(4).
- [28] 吴元芳, 李笑冰, 陈丽珠, 等. 相对论重离子碰撞中确定 QCD 相边界的若干问题[J]. *核技术*, 2023, 46(4).
- [29] Abdallah M S, Aboona B E, Adam J, et al. Measurements of Proton High-Order Cumulants in  $\sqrt{s_{NN}} = 3$  GeV Au + Au Collisions and Implications for the QCD Critical Point[J]. *Physical Review Letters*, 2022.
- [30] 孙开佳, 陈列文, Ming K C, 等. 重离子碰撞中的轻核产生和 QCD 相变[J]. *核技术*, 2023.
- [31] 张宇, 张定伟, 罗晓峰. 相对论重离子碰撞中 QCD 相图的实验研究[J]. *核技术*, 2023, 46(4).
- [32] Abdulhamid M, Aboona B, Adam J, et al. Beam Energy Dependence of Triton Production and Yield Ratio ( $N_t \times N_p / N_d^2$ ) in Au + Au Collisions at RHIC[J/OL]. *Physical Review Letters*, 2023, 130(20):202301[2023-10-08]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.130.202301>.
- [33] Adam J, Adamczyk L, Adams J R, et al. Beam energy dependence of net- $\Lambda$  fluctuations measured by the STAR experiment at the BNL Relativistic Heavy Ion Collider[J/OL]. *Physical Review C*, 2020, 102(2):024903[2023-09-18]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.102.024903>.
- [34] Harrison M, Ludlam T, Ozaki S. RHIC project overview[J/OL]. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 2003, 499(2-3):235-244[2023-09-19]. <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S016890020201937X>. DOI: 10.1016/S0168-9002(02)01937-X.
- [35] Ackermann K, Adams N, Adler C, et al. STAR detector overview[J/OL]. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 2003, 499(2-3):624-632[2023-09-21]. <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0168900202019605>. DOI: 10.1016/S0168-9002(02)01960-5.
- [36] Bergsma F, Blyth C, Brown R, et al. The STAR detector magnet subsystem[J/OL]. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 2003, 499(2-3):633-639[2023-09-19]. <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0168900202019617>. DOI: 10.1016/S0168-9002(02)01961-7.
- [37] Anderson M, Berkovitz J, Betts W, et al. The STAR time projection chamber: a unique tool for studying high multiplicity events at RHIC[J/OL]. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 2003, 499(2-3):659-678[2023-09-19]. <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0168900202019642>. DOI: 10.1016/S0168-9002(02)01964-2.

- [38] Llope W. The large-area time-of-flight upgrade for STAR[J/OL]. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*, 2005, 241(1-4):306-310[2023-09-21]. <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0168583X05012267>. DOI: 10.1016/j.nimb.2005.07.089.
- [39] Llope W, Zhou J, Nussbaum T, et al. The STAR Vertex Position Detector[J/OL]. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 2014, 759:23-28[2023-09-26]. <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0168900214004938>. DOI: 10.1016/j.nima.2014.04.080.
- [40] Beddo M, Bielick E, Fornek T, et al. The STAR Barrel Electromagnetic Calorimeter[J/OL]. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 2003, 499(2-3):725-739[2023-09-19]. <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0168900202019708>. DOI: 10.1016/S0168-9002(02)01970-8.
- [41] Allgower C, Anderson B, Baldwin A, et al. The STAR endcap electromagnetic calorimeter [J/OL]. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 2003, 499(2-3):740-750[2023-09-19]. <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S016890020201971X>. DOI: 10.1016/S0168-9002(02)01971-X.
- [42] Whitten C A, STAR Collaboration, Kponou A, et al. The Beam-Beam Counter: A Local Polarimeter at STAR[C/OL]//AIP Conference Proceedings: volume 980. *AIP*, 2008: 390-396 [2023-09-19]. <https://pubs.aip.org/aip/acp/article/980/1/390-396/639855>. DOI: 10.1063/1.2888113.
- [43] Adler C, Denisov A, Garcia E, et al. The RHIC zero degree calorimeter[J/OL]. *Nucl. Instrum. Meth. A*, 2001, 470:488-499. DOI: 10.1016/S0168-9002(01)00627-1.
- [44] Ruan L, Lin G, Xu Z, et al. Perspectives of a Midrapidity Dimuon Program at RHIC: A Novel and Compact Muon Telescope Detector[J/OL]. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 2009, 36(9):095001[2023-09-19]. <http://arxiv.org/abs/0904.3774>. DOI: 10.1088/0954-3899/36/9/095001.
- [45] Schweda K. A heavy flavor tracker for STAR[J/OL]. *Nuclear Physics A*, 2006, 774:907-910 [2023-09-19]. <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0375947406003745>. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2006.06.163.
- [46] Margetis S. Heavy Flavor Tracker (HFT): The new silicon vertex detector for the STAR experiment at RHIC[J/OL]. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, 2011, 210-211: 227-230[2023-09-19]. <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0920563210005177>. DOI: 10.1016/j.nuclphysbps.2010.12.081.
- [47] Bland L C, Bieser F, Brown R L, et al. Future of low-x forward physics at RHIC[EB/OL]. 2005 [2023-09-19]. <http://arxiv.org/abs/hep-ex/0502040>. DOI: 10.1140/epjc/s2005-02334-6.
- [48] 谢一冈, 陈畅, 王曼, 等. 粒子探测器与数据获取[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [49] 克劳斯·格鲁彭, 鲍里斯·施瓦兹. 粒子探测器[M]. 朱永生, 盛华义, 译. 北京: 机械工业出版社, 2017.
- [50] 王义, 李元景. STAR 飞行时间探测器和反物质氦核的发现[J]. *现代物理知识*, 2012, 24(06):19-22.
- [51] 邹涛. RHIC STAR 飞行时间探测器 MRPC 模块批量生产的质量控制与性能研究[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2010.
- [52] 孙勇杰. 相对论重离子实验中的 MRPCTOF 研制[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2006.

- [53] Luo X, Xu J, Mohanty B, et al. Volume fluctuation and auto-correlation effects in the moment analysis of net-proton multiplicity distributions in heavy-ion collisions[J/OL]. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 2013, 40(10):105104[2023-09-27]. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0954-3899/40/10/105104>.
- [54] Asakawa M, Kitazawa M. Fluctuations of conserved charges in relativistic heavy ion collisions: An introduction[J/OL]. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 2016, 90:299-342[2023-09-27]. <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0146641016300023>. DOI: 10.1016/j.pnnp.2016.04.002.
- [55] Nonaka T, Kitazawa M, Esumi S. More efficient formulas for efficiency correction of cumulants and effect of using averaged efficiency[J/OL]. *Physical Review C*, 2017, 95(6):064912[2023-09-27]. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.95.064912>.
- [56] Kitazawa M. Efficient formulas for efficiency correction of cumulants[J/OL]. *Physical Review C*, 2016, 93(4):044911[2023-10-02]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.93.044911>.
- [57] Kitazawa M, Luo X. Properties and uses of factorial cumulants in relativistic heavy-ion collisions [J/OL]. *Physical Review C*, 2017, 96(2):024910[2023-10-02]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.96.024910>.
- [58] Adam J, Adamczyk L, Adams J R, et al. Collision-energy dependence of second-order off-diagonal and diagonal cumulants of net-charge, net-proton, and net-kaon multiplicity distributions in Au + Au collisions[J/OL]. *Physical Review C*, 2019, 100(1):014902[2023-09-30]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.100.014902>.
- [59] Particle Data Group. Review of Particle Physics[J/OL]. *Chinese Physics C*, 2016, 40(10):100001 [2023-10-01]. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1674-1137/40/10/100001>.
- [60] Luo X, Nonaka T. Efficiency correction for cumulants of multiplicity distributions based on track-by-track efficiency[J/OL]. *Physical Review C*, 2019, 99(4):044917[2023-10-04]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.99.044917>.
- [61] Ahlback C, Usatine J, Pippenger N. A Combinatorial Interpretation of the Joint Cumulant [M/OL]. *arXiv*, 2012[2023-10-04]. <http://arxiv.org/abs/1211.0652>.
- [62] Yang Z, Luo X, Mohanty B. Baryon-strangeness correlations in Au+Au collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 7.7 - 200$  GeV from the UrQMD model[J/OL]. *Physical Review C*, 2017, 95(1):014914[2023-10-04]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.95.014914>.
- [63] Abdallah M S, Aboona B E, Adam J, et al. Higher-order cumulants and correlation functions of proton multiplicity distributions in  $\sqrt{s_{NN}} = 3$  GeV Au + Au collisions at the RHIC STAR experiment[J/OL]. *Physical Review C*, 2023, 107(2):024908[2023-10-05]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.107.024908>.
- [64] Abdallah M S, Adam J, Adamczyk L, et al. Cumulants and correlation functions of net-proton, proton, and antiproton multiplicity distributions in Au + Au collisions at energies available at the BNL Relativistic Heavy Ion Collider[J/OL]. *Physical Review C*, 2021, 104(2):024902 [2023-10-05]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.104.024902>.
- [65] Adamczyk L, Adkins J K, Agakishiev G, et al. Bulk properties of the medium produced in relativistic heavy-ion collisions from the beam energy scan program[J/OL]. *Physical Review C*, 2017, 96(4):044904[2023-10-05]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.96.044904>.

- [66] Adler C, Ahammed Z, Allgower C, et al. Midrapidity  $\Lambda$  and  $\bar{\Lambda}$  Production in Au + Au Collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 130$  GeV[J/OL]. *Physical Review Letters*, 2002, 89(9):092301[2023-10-05]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.89.092301>.
- [67] Adam J, Adamczyk L, Adams J R, et al. Strange hadron production in Au + Au collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 7.7, 11.5, 19.6, 27,$  and  $39$  GeV[J/OL]. *Physical Review C*, 2020, 102(3):034909 [2023-10-05]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.102.034909>.
- [68] Loizides C, Kamin J, d'Enterria D. Improved Monte Carlo Glauber predictions at present and future nuclear colliders[J/OL]. *Physical Review C*, 2018, 97(5):054910[2023-10-06]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.97.054910>.
- [69] Wang E, Wang X N. Interplay of soft and hard processes and hadron p T spectra in pA and AA collisions[J/OL]. *Physical Review C*, 2001, 64(3):034901[2023-10-06]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.64.034901>.
- [70] Eskola K J, Helenius I, Kuha M, et al. Shadowing in Inelastic Nucleon-Nucleon Cross Section? [J/OL]. *Physical Review Letters*, 2020, 125(21):212301[2023-10-06]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.125.212301>.
- [71] Wong C Y, Lu Z D. Multiple-collision model for high-energy nucleus-nucleus collisions[J/OL]. *Physical Review D*, 1989, 39(9):2606-2616[2023-10-06]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.39.2606>.
- [72] Deliyergiyev M, Rybczyński M. Multiplicity fluctuations in the Glauber Monte Carlo approach [J/OL]. *Physical Review C*, 2020, 101(1):014909[2023-10-06]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.101.014909>.
- [73] Adamczyk L, Adkins J, Agakishiev G, et al. Energy Dependence of Moments of Net-Proton Multiplicity Distributions at RHIC[J/OL]. *Physical Review Letters*, 2014, 112(3):032302[2023-10-06]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.032302>.
- [74] Loizides C. Glauber modeling of high-energy nuclear collisions at the subnucleon level[J/OL]. *Physical Review C*, 2016, 94(2):024914[2023-10-06]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.94.024914>.
- [75] Jonas F, Loizides C. Centrality dependence of electroweak boson production in PbPb collisions at the CERN Large Hadron Collider[J/OL]. *Physical Review C*, 2021, 104(4):044905[2023-10-06]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.104.044905>.
- [76] Miller M L, Reygers K, Sanders S J, et al. Glauber Modeling in High-Energy Nuclear Collisions [J/OL]. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 2007, 57(1):205-243[2023-10-06]. <https://www.annualreviews.org/doi/10.1146/annurev.nucl.57.090506.123020>.
- [77] Abelev B I, Aggarwal M M, Ahammed Z, et al. Systematic measurements of identified particle spectra in pp, d + Au, and Au + Au collisions at the STAR detector[J/OL]. *Physical Review C*, 2009, 79(3):034909[2023-10-06]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.79.034909>.
- [78] Abelev B I, Aggarwal M M, Ahammed Z, et al. Identified particle production, azimuthal anisotropy, and interferometry measurements in Au + Au collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 9.2$  GeV [J/OL]. *Physical Review C*, 2010, 81(2):024911[2023-10-06]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.81.024911>.
- [79] Sombun S, Steinheimer J, Herold C, et al. Higher order net-proton number cumulants dependence on the centrality definition and other spurious effects[J/OL]. *Journal of Physics G*:

- Nuclear and Particle Physics, 2018, 45(2):025101[2023-10-06]. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6471/aa9c6c>.
- [80] Chen Q, Wang H S, Ma G L. Probing fluctuations and correlations of strangeness by net-kaon cumulants in Au + Au collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 7.7$  GeV[J/OL]. Physical Review C, 2023, 107(3):034910[2023-10-06]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.107.034910>.
- [81] Chen Q, Ma G L. Dynamical development of proton cumulants and correlation functions in Au + Au collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 7.7$  GeV from a multiphase transport model[J/OL]. Physical Review C, 2022, 106(1):014907[2023-10-06]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.106.014907>.
- [82] Hippert M, Fraga E, Santos E. Critical versus spurious fluctuations in the search for the QCD critical point[J/OL]. Physical Review D, 2016, 93(1):014029[2023-10-06]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.014029>.
- [83] Chatterjee A, Zhang Y, Liu H, et al. Effects of centrality fluctuation and deuteron formation on the proton number cumulant in Au+Au collisions at  $= 3$  GeV from the JAM model \*[J/OL]. Chinese Physics C, 2021, 45(6):064003[2023-10-06]. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1674-1137/abf427>.
- [84] He S, Luo X. Event-by-event efficiency fluctuations and efficiency correction for cumulants of superposed multiplicity distributions in relativistic heavy-ion collision experiments[J/OL]. Chinese Physics C, 2018, 42(10):104001[2023-10-06]. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1674-1137/42/10/104001>.
- [85] Sugiura T, Nonaka T, Esumi S. Volume fluctuation and multiplicity correlation in higher-order cumulants[J/OL]. Physical Review C, 2019, 100(4):044904[2023-10-06]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.100.044904>.
- [86] Chatterjee A, Zhang Y, Zeng J, et al. Effect of centrality selection on higher-order cumulants of net-proton multiplicity distributions in relativistic heavy-ion collisions[J/OL]. Physical Review C, 2020, 101(3):034902[2023-10-06]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.101.034902>.
- [87] Behera N K, Nayak R K, Dash S. Baseline study for net-proton number fluctuations at top energies available at the BNL Relativistic Heavy Ion Collider and at the CERN Large Hadron Collider with the Angantyr model[J/OL]. Physical Review C, 2020, 101(6):064903[2023-10-06]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.101.064903>.
- [88] Aboona B, Adam J, Adamczyk L, et al. Beam Energy Dependence of Fifth- and Sixth-Order Net-Proton Number Fluctuations in Au + Au Collisions at RHIC[J/OL]. Physical Review Letters, 2023, 130(8):082301[2023-10-06]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.130.082301>.
- [89] Pan X, Zhang F, Li Z, et al. Statistical and dynamical parts of the cumulants of conserved charges in relativistic heavy ion collisions[J/OL]. Physical Review C, 2014, 89(1):014904[2023-10-06]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.89.014904>.
- [90] Hirayama R, Grassi F, Serenone W M, et al. Cumulants of conserved charges in hydrodynamic simulations[J/OL]. Physical Review C, 2023, 107(2):024910[2023-10-06]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.107.024910>.
- [91] Adamczewski-Musch J, Arnold O, Behnke C, et al. Proton-number fluctuations in  $\sqrt{s_{NN}} = 2.4$  GeV Au + Au collisions studied with the High-Acceptance DiElectron Spectrometer (HADES) [J/OL]. Physical Review C, 2020, 102(2):024914[2023-10-06]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.102.024914>.

- [92] Bleicher M, Zabrodin E, Spieles C, et al. Relativistic hadron-hadron collisions in the ultra-relativistic quantum molecular dynamics model[J/OL]. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 1999, 25(9):1859-1896[2023-10-09]. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0954-3899/25/9/308>.
- [93] Luo X, Mohanty B, Xu N. Baseline for the cumulants of net-proton distributions at STAR [J/OL]. *Nuclear Physics A*, 2014, 931:808-813[2023-10-09]. <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0375947414003650>. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2014.08.105.
- [94] Li C, Biswas D, Sahoo N R. Cumulants of net-strangeness multiplicity distributions at energies available at the BNL Relativistic Heavy Ion Collider[J/OL]. *Physical Review C*, 2023, 107(6):064905[2023-09-20]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.107.064905>.
- [95] 刘次华. 随机过程[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2014.
- [96] Luo X. Error estimation for moment analysis in heavy-ion collision experiment[J/OL]. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 2012, 39(2):025008[2023-10-07]. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0954-3899/39/2/025008>.
- [97] Luo X. Unified description of efficiency correction and error estimation for moments of conserved quantities in heavy-ion collisions[J/OL]. *Physical Review C*, 2015, 91(3):034907[2023-10-07]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.91.034907>.
- [98] Bai J, Ng S. Tests for Skewness, Kurtosis, and Normality for Time Series Data[J/OL]. *Journal of Business & Economic Statistics*, 2005, 23(1):49-60[2023-10-07]. <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1198/073500104000000271>.
- [99] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计第四版[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [100] Efron B. Bootstrap methods: Another look at the jackknife[J]. *The Annals of Statistics*, 1979, 7(1):1-26.
- [101] Van Der Ark L A, Bolt D M, Wang W C, et al. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics: volume 140 quantitative Psychology Research: The 79th Annual Meeting of the Psychometric Society, Madison, Wisconsin, 2014[M/OL]. Cham: Springer International Publishing, 2015 [2023-10-08]. <https://link.springer.com/10.1007/978-3-319-19977-1>.
- [102] Abdallah M, Adam J, Adamczyk L, et al. Measurement of the Sixth-Order Cumulant of Net-Proton Multiplicity Distributions in Au + Au Collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 27, 54.4, \text{ and } 200 \text{ GeV}$  at RHIC[J/OL]. *Physical Review Letters*, 2021, 127(26):262301[2023-10-08]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.127.262301>.



## 博士期间发表的论文及其它成果

博士期间发表的论文:

- Changfeng Li, Deeptak Biswas, Nihar Ranjan Sahoo. Cumulants of net-strangeness multiplicity distributions at energies available at the BNL Relativistic Heavy Ion Collider, Phys. Rev. C, 2023, 107(6):064905

博士期间的口头报告:

- Changfeng Li for the STAR collaboration, Measurement of Off-diagonal cumulants between net-proton and net-kaon multiplicity distributions in STAR.(QPT2021)

博士期间的墙报:

- Changfeng Li for the STAR collaboration, Measurement of higher-order cumulants of net-(kaon+Lambda) multiplicity distributions in  $\sqrt{s_{NN}} = 27$  GeV Au+Au collisions with STAR.(Quark Matter 2022)



## 致 谢

五年的博士生活马上就要结束了，在这五年里我学到了很多，同时也遇到一些困难与挑战，在克服困难的过程中许多人给我提供了帮助，在此，我向所有给予我帮助和支持的人表示感谢。

首先感谢我的父母、家人，是他们对我的理解与支持让我能够完成学业。

我要感谢徐庆华老师与 Nihar Ranjan Sahoo 老师，两位老师共同指导我完成博士论文的工作。徐老师对待科研工作严谨踏实，是我求学路上重要的指引者和榜样。徐老师带我走进了相对论重离子碰撞物理实验分析领域，教会了我实验分析的流程，当我遇到问题时，总会给我帮助。博士毕业论文写作期间不厌其烦的帮我修改，对论文的完成有很大的帮助。五年的学习生活中，徐老师的言传身教使我在受益匪浅。Nihar 老师对科研工作总是充满激情，在指导我的过程中每天督促我工作，当我遇到问题时总是耐心的给我讲解，Nihar 的指导和鼓励，对我博士期间的学习有很大的帮助。

在博士期间很多老师的课程对我理解高能物理、分析实验数据有很大帮助，比如梁作堂老师的粒子物理学、黄性涛老师的粒子探测技术、易立老师的重离子碰撞物理专题、李海峰老师的实验数据分析等。在这里要对山东大学的老师表示感谢，他们教会了我许多知识。

在博士期间有好多校外的老师同学对我提供了很多帮助，在这里要感谢朱相雷老师，朱老师在我估计  $\Lambda$  效率时提供了很大的帮助；要感谢罗晓峰老师，在 QPT2021 会议期间罗老师对如何做效率修正给与指导；还要感谢 Arghya 博士，在我刚做累积量测量时给我提供很多帮助。在这里对所有帮助过我的老师同学表示感谢。

还有在山大每周的组会上，许长补老师、杨驰老师、易立老师、陈震宇老师、张金龙老师、林挺老师、熊伟志老师、聂茂武老师、杨钱老师对我的工作提出了很多有意义的建议。

还要感谢山大 STAR 组和我一起学习的同学们：梅金成、沈付旺、王帅、孔凡刚、朱展文、陈佳、苟兴瑞、王桢、许一可、纪赵惠子、闫高国、于毅、史迎迎、何杨、孙川、张晴、王晓凤、王永红、高涛亚、张梦雪、张宜新、汪杰克、沈丹丹、包贤文等。

最后，感谢所有给予我帮助，关心、支持和爱护我的人们。